МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«Средняя общеобразовательная школа №13» города Обнинска
Адрес: Российская Федерация, Калужская область, город Обнинск, улица Калужская, д. 11,
электронный адрес: Obninskshkola13@yandex.ru, тел/факс (848439) 3-40-42

Принята на педагогическом совете
Протокол № 1 от 31.08.2023

Утверждена
приказом № 73-ОД от
31.08.2023
Директор школы
Пестрикова О. В.

Рабочая программа по элективному курсу

«СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

(для учащихся 11 классов)

(ФГОС СОО)

(предметная область: математика)

Уровень общего образования
Среднее общее образование, 11-е классы

Количество часов - 68

Учитель Воропаева Ирина Михайловна

Пояснительная записка

Содержание рабочей программы элективного курса соответствует основному курсу математики для средней школы и федеральному компоненту Государственного образовательного стандарта по математике; развивает базовый курс математики на старшей ступени общего образования, углубляет и расширяет школьный курс математики 10-11 классов.

Данный элективный курс направлен на формирование умений, связанных с решением задач повышенного и высокого уровня сложности, получение дополнительных знаний по математике.

Рабочая программа элективного курса отвечает требованиям обучения на старшей ступени, направлена на реализацию личностно ориентированного обучения, основана на деятельностном подходе к обучению, предусматривает овладение учащимися способами деятельности, методами и приемами решения математических задач. Включение уравнений и неравенств всех типов, текстовых задач разных типов, рассмотрение методов и приемов их решений отвечают назначению элективного курса – расширению и углублению содержания курса математики с целью подготовки учащихся 10-11 классов к государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

Содержание по блочно-модульному принципу, представлено в законченных самостоятельных модулях по каждому типу задач и методам их решения и соответствует перечню контролируемых вопросов в контрольно-измерительных материалах на ЕГЭ.

На учебных занятиях элективного курса используются активные методы обучения, предусматривается самостоятельная работа по овладению методами и приемами решения математических задач. Занятия проходят в форме свободного практического урока и состоят из теоретической и практической частей. Рабочая программа данного курса направлена на повышение уровня математической грамотности старшеклассников.

Курс призван помочь учащимся с любой степенью подготовленности в овладении способами, методами и приемами решения математических задач, способствует развитию познавательных интересов, мышления учащихся, умению оценить свой потенциал для дальнейшего обучения.

С целью контроля и проверки усвоения учебного материала проводятся длительные домашние контрольные работы по каждому блоку, семинары с целью обобщения и систематизации. В учебно-тематическом плане определены зачетные работы по каждому блоку учебного материала.

Структура экзаменационной работы в форме ЕГЭ требует от учащихся не только знаний на базовом уровне, но и умений выполнять задания повышенной и высокой сложности. В рамках урока не всегда возможно рассмотреть подобные задания, поэтому программа элективного курса позволяет решить эту задачу.

Задания данного курса не всегда просты в решении, что позволяет повысить учебную мотивацию учащихся.

Цель курса -создание условий для формирования и развития у обучающихся навыкованализа и систематизации полученных ранее знаний, подготовка к итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

Задачи курса:

 обеспечение усвоения обучающимися наиболее общих приемов и способов решения задач;

 формирование и развитие у старшеклассников аналитического и логического мышления при проектировании решения задачи;

 развитие умений самостоятельно анализировать и решать задачи в нестандартной ситуации;

 формирование опыта творческой деятельности учащихся через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач;

 формирование навыка работы с различными источниками;

 развитие коммуникативных и общеучебных навыков работы.

Основные принципы:

– ***опережающая сложность*** (дома предлагается решить по5задач на неделю,причем3 доступны всем, 1– небольшой части учащихся и 1– ни одному ученику);

– ***смена приоритетов*** (при решении достаточно трудных задач отдается приоритет идее;при решении стандартных);

– ***вариативность*** (сравнение различных методов и способов решения одного и того жеуравнения или неравенства);

– ***самоконтроль*** (регулярный и систематический анализ своих ошибок и неудач долженбыть непременным элементом самостоятельной работы учащихся).

Основными формами организации учебно-познавательной деятельности на элективном курсе являются лекция, беседа, практикум, консультация.

Нормативное обеспечение программы:

Программа разработана в соответствии со следующими нормативными документами:

- Федеральным законом от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;

- приказом Минобразования России от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования» (с изменениями и дополнениями);

- Уставом МБОУ « СОШ №13»города Обнинска;

- образовательной программой МБОУ « СОШ №13»города Обнинска;

-Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Стандарт основного общего и среднего общего образования по математике.

- Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации «об утверждении федеральных перечней учебников , рекомендованных (допущенных) к использованию в образовательном процессе в образовательных учреждениях,, реализующих образовательные программы общего образования и имеющих государственную аккредитацию», издаваемый ежегодно

Планируемые результаты

Изучение данного курса дает учащимся возможность:

- повторить и систематизировать ранее изученный материал школьного курса математики;
- освоить основные приемы решения задач;
- овладеть навыками построения и анализа предполагаемого решения поставленной задачи;
- познакомиться и использовать на практике нестандартные методы решения задач;
- повысить уровень своей математической культуры, творческого развития, познавательной активности;
- познакомиться с возможностями использования электронных средств обучения, в том числе интернет-ресурсов, в ходе подготовки к итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

В процессе изучения материала используются как традиционные формы обучения, так и самообразование, саморазвитие учащихся посредством самостоятельной работы с информационным и методическим материалом.

Для получения информации об уровне усвоения данного курса учащимся предлагается создание портфолио по всем темам курса или проекта, а также выполнение тестовых заданий (один раз в год), один из которых итоговый. Рабочая программа элективного курса рассчитана на два года обучения, 1 час в неделю, всего в объеме 66 часов – 33 часа в 10-м классе и 33 часа в 11-м классе.

Учебно-тематическоепланирование

10 класс, 1ч в неделю, всего 33 ч.

№ п/п	Тема	Всего часов	Лекция	Практикум	Тестирование	Дата	
						План	Факт
1.	Общие сведения об уравнениях, неравенствах и их системах	3	1	2	0		
2.	Методы решения неравенств	4	1	2	1		
3.	Методы решения систем уравнений	3	1	2	0		
4.	Уравнения с модулем	4	1	2	1		
5.	Неравенства с модулем	4	1	2	1		
6.	Уравнения с параметрами	4	1	2	1		
7.	Неравенства с параметрами	3	1	2	0		
8.	Квадратные уравнения и неравенства, содержащие параметр	6	2	3	1		
9.	Решение уравнений и неравенств	3	0	2	1		

Календарно-тематическое планирование

10 класс , 33 часа

№п/п	Содержание учебного материала	Кол-во часов	Дата
1	Основные определения. Область допустимых значений. О системах и совокупностях уравнений и неравенств	1	
2	Общие методы преобразования уравнений	1	
3	Дробно-рациональные алгебраические уравнения.	1	
4	Некоторые свойства числовых неравенств. Неравенства с переменной. Квадратичные неравенства.	1	
5	Метод интервалов для рациональных неравенств. Метод замены множителей.	1	
6	Дробно-рациональные алгебраические неравенства. Метод интервалов для решения дробно-рациональных алгебраических неравенств.	2	
7	Системы алгебраических уравнений.	1	
8	Замена переменных. Однородные системы.Симметрические системы.	2	
9	Модуль числа. Свойства модуля. Преобразование выражений, содержащих модуль. Геометрическая интерпретация модуля.	1	
10	Методы решения уравнений с модулем. Решение комбинированных уравнений, содержащих переменную и переменную под знаком модуля.	2	
11	График функции $y = \lvert x \rvert$. Построение графиков функций, содержащих неизвестное под знаком модуля.	1	
12	Теорема о равносильности неравенства с модулем и рационального неравенства.	1	
13	Основные методы решения неравенств с модулем.	3	
14	Понятие уравнения с параметром. Контрольные значения параметра.	1	
15	Основные методы решения уравнений с параметром.	1	
16	Линейные уравнения с параметром.	2	
17	Понятие неравенства с параметром. Основные методы решения неравенств с параметрами.	1	
18	Линейные неравенства с параметрами.	2	
19	Теорема Виета. Расположение корней квадратного трёхчлена.	1	
20	Алгоритм решения уравнений. Аналитический и графический способы.	2	
21	Решение уравнений с нестандартным условием.	3	
22	Решение уравнений и неравенств	2	

Учебно-тематический план

11 класс, 1ч в неделю, всего 33ч.

№ п/п	Тема	Всего часов	Лекция	Практикум	Тестирование	Дата	
						План	Факт
1.	Тригонометрические уравнения и неравенства	6	2		1		
2.	Иррациональные уравнения и неравенства	5	2	2	1		
3.	Логарифмические и показательные уравнения и неравенства	5	1	3	1		
4.	Нестандартные методы решения уравнений и неравенств	5	1	3	1		
5.	Задачи с параметрами	8	0	7	1		
6.	Решение уравнений и неравенств	4	0	3	1		
7.	Защита проекта	1	0	0	0		

Календарно-тематическое планирование

11 класс , 33 часа

№п/п	Содержание учебного материала	Кол-во часов	Дата
	Тригонометрические уравнения и неравенства	**6**	
1.	Простейшие тригонометрические уравнения.	1	
2.	Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств.	1	
3.	Отбор корней в тригонометрических уравнениях.	1	
4.	Системы тригонометрических уравнений.	1	
5.	Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции.	1	
6.	Решение тригонометрических неравенств методом интервалов.	1	
	Иррациональные уравнения и неравенства	**5**	
7.	Иррациональные алгебраические выражения и уравнения.	1	
8.	Решение иррациональных уравнений методом замены переменной.	1	
9.	Решение иррациональных уравнений методом оценки, использование монотонности, однородности.	1	
10.	Дробно-иррациональные неравенства.	1	
11.	Метод интервалов при решении иррациональных неравенств.	1	
	Логарифмические и показательные уравнения и неравенства	**5**	
12.	Методы решении показательных и логарифмических уравнений .	1	
13.	Замена переменных в уравнениях. Логарифмирование.	1	
14.	Методы решений показательных и логарифмических неравенств (метод замены переменных, метод замены множителей).	1	
15.	Решение показательных и логарифмических уравнений, содержащих неизвестную в основании.	1	
16.	Графический способ решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств.	1	
	Нестандартные методы решения уравнений и неравенств	**5**	
17.	Применение свойств квадратного трехчлена.	1	
18.	Использование свойств функции (свойство ограниченности, монотонности).	1	

19.	Уравнения, при решении которых используются прогрессии.	1	
20.	Уравнения с двумя неизвестными.	1	
21.	Показательно-степенные уравнения.	1	
	Задачи с параметрами	**8**	
22.	Аналитический подход при решении задач с параметрами.	1	
23.	Рациональные задачи с параметрами. Запись ответов.	1	
24.	Иррациональные задачи с параметрами. «Собирание» ответов.	1	
25.	Задачи с модулями и параметрами. Критические значения параметра.	1	
26.	Метод интервалов в неравенствах с параметрами.	1	
27.	Замена в задачах с параметрами. Метод разложения в задачах с параметрами.	1	
28.	Системы с параметрами.	1	
29.	Применение производной при анализе и решении задач с параметрами.	1	
	Решение уравнений и неравенств (повторение)	**4**	
30.	Решение рациональных и иррациональных уравнений и неравенств	1	
31.	Решение логарифмических и показательных уравнений и неравенств	1	
32.	Решение уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля	1	
33.	Решение систем уравнений и неравенств	1	

Содержание элективных занятий

Программа элективного курса рассчитана на два года обучения -10 и 11 классы и содержит следующие темы:

“Общие сведения об уравнениях, неравенствах и их системах” 3 часа

Основные определения. Область допустимых значений. О системах и совокупностях уравнений и неравенств. Общие методы преобразования уравнений (рациональные корни уравнения, “избавление” от знаменателя, замена переменной в уравнении). Представление о рациональных алгебраических выражениях. Дробно-рациональные алгебраические уравнения. Общая схема решения. Метод замены при решении дробно-рациональных уравнений.

“Методы решения неравенств” 4 часа

Некоторые свойства числовых неравенств. Неравенства с переменной. Квадратичные неравенства. Метод интервалов для рациональных неравенств. Метод замены множителей. Дробно-рациональные алгебраические неравенства. Общая схема решения методом сведения к совокупности систем. Метод интервалов решения дробно-рациональных алгебраических неравенств.

“Методы решения систем уравнений” 3 часа

Системы алгебраических уравнений. Замена переменных. Однородные системы.

Симметрические системы.

“Уравнения с модулем” 4 часа

Модуль числа. Свойства модуля. Преобразование выражений, содержащих модуль. Геометрическая интерпретация модуля. Преобразование выражений, содержащих модуль, используя его определение. График функции $y = |x|$. Методы решения уравнений с модулем. Решение комбинированных уравнений, содержащих переменную и переменную под знаком модуля. Построение графиков функций, содержащих неизвестное под знаком модуля.

“Неравенства с модулем” 4 часа

Теорема о равносильности неравенства с модулем и рационального неравенства. Основные методы решения неравенств с модулем.

“Уравнения с параметрами” 4 часа

Понятие уравнения с параметром, примеры. Контрольные значения параметра. Основные методы решения уравнений с параметром. Линейные уравнения с параметром.

“**Неравенства с параметрами” 3часа**

Понятие неравенства с параметром, примеры. Основные методы решения неравенств с параметрами. Линейные неравенства с параметрами.

“Квадратные уравнения и неравенства, содержащие параметр” 6 часов

Теорема Виета. Расположение корней квадратного трёхчлена. Алгоритм решения уравнений. Аналитический и графический способы. Решение уравнений с нестандартным условием.

“Тригонометрические уравнения и неравенства” 6 часов

Простейшие тригонометрические уравнения. Сведение тригонометрических уравнений простейшим с помощью тождественных преобразований. Сведение тригонометрического уравнения к рациональному с одним неизвестным. Метод решения тригонометрических уравнений и неравенств. Отбор корней в тригонометрических уравнениях. Примеры систем тригонометрических уравнений. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции. Обобщение метода интервалов на тригонометрической окружности. Решение тригонометрических неравенств методом интервалов.

“**Иррациональные уравнения и неравенства” 5часов**

Представление об иррациональных алгебраических функциях. Понятие арифметических и алгебраических корней. Иррациональные алгебраические выраженияи уравнения. Уравнения с квадратными радикалами. Замена переменной. Замена с ограничениями. Неэквивалентные преобразования. Сущность проверки.Метод эквивалентных преобразований уравнений с квадратными радикалами. Сведение иррациональных уравнений к системам. Освобождение от кубических радикалов. Метод оценки. Использование монотонности. Использование однородности. Иррациональные алгебраические неравенства. Почему неравенства с радикалами сложнее уравнений. Эквивалентные преобразования неравенств. Стандартные схемы освобождения от радикалов в неравенствах (сведение к системам и совокупностямсистем). Дробно-иррациональные неравенства. Сведение к совокупностям систем. Метод интервалов при решении иррациональных неравенств. Замена при решении иррациональных неравенств.

“Логарифмические и показательные уравнения и неравенства” 5 часов

Методы решении показательных и логарифмических уравнений . Преобразования логарифмических уравнений. Замена переменных в уравнениях. Логарифмирование. Показательные и логарифмические неравенства. Методы решений показательных и логарифмических неравенств (метод замены переменных, метод замены множителей). Основные типы показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Основные способы их решения. Примеры потери корней и приобретения лишних корней. Решение показательных и логарифмических уравнений, содержащих неизвестную в основании. Использование свойств функции. Графический способ решения. Использование нескольких приёмов при решении логарифмических и показательных уравнений и неравенств.

“**Нестандартные методы решения уравнений и неравенств” 5часов**

Применение свойств квадратного трехчлена. Использование свойств функции (свойство ограниченности, монотонности). Использование суперпозиций функций. . Уравнения тождества. Уравнения, при решении которых используются прогрессии. Уравнения с двумя неизвестными. Показательно-степенные уравнения.

“Задачи с параметрами” 8 часов

Аналитический подход. Выписывание ответа (описание множеств решений) в задачах с параметрами. Рациональные задачи с параметрами. Запись ответов. Иррациональные задачи с параметрами. «Собирание» ответов. Задачи с модулями и параметрами. Критические значения параметра. Метод интервалов в неравенствах с параметрами. Замена в задачах с параметрами. Метод разложения в задачах с параметрами. Разложение с помощью разрешения относительно параметра. Системы с параметрами.
Применение производной при анализе и решении задач с параметрами.

Решение уравнений и неравенств (повторение в конце10класса, 11класса) 7часов,изних 2 часа отводится на тестирование.

Основные знания, умения

Для изучения курса учащиеся должны иметь базовые знания и умения в соответствии с “Программой для общеобразовательных школ”, (составитель Г.М. Кузнецова, Н.Г. Миндюк.Издательство “Дрофа”, 20010 год), рекомендованной Департаментом образовательных программ и стандартов общего образования Министерства образования Российской Федерации.

В результате изучения данного курса учащиеся:
должны знать:

- общие сведения об уравнениях, неравенствах и их системах;
- методы решения неравенств и систем уравнений;
- основные приёмы и методы решения: уравнений и неравенств с модулем и параметрами; линейных, квадратных уравнений и неравенств с параметрами; иррациональных, тригонометрических, показательных, логарифмических уравнений и неравенств, в том числе с параметрами.

должны уметь:

- применять изученные методы и приемы при решении уравнений и неравенств;
- проводить исследования при решении уравнений и неравенств с параметрами.

МАТЕРИАЛЫ К ЭЛЕКТИВНОМУ КУРСУ

1. Уравнения, множеством решений которых является область определения уравнения

К таким уравнениям будем относить уравнения-тождества (уравнения-формулы). Примеры уравнений-тождеств:

1.1 $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 1$

1.2 $\sqrt{x^2} = |x|$

1.3 $\log_x x = 1$

1.4 $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x$

1.5 $\sin x = tgx \cdot \cos x$

1.6 $\frac{x}{x} = 1$

Теоретической основой решения уравнений-тождеств являются:

- формулы алгебры и тригонометрии;
- понятия области определения и множества решения уравнения;
- области определения элементарных функций.

Под областью определения уравнения (ООУ), как известно, понимают общую часть областей определения функций, входящих в уравнение. Под множеством решений уравнения $f(x)=g(x)$ (МРУ) понимают множество значений переменной x, при которых получается верное числовое равенство.

Составим таблицу областей определения элементарных функций.

Элементарные функции и их области определения

№	Функция	ООФ
1	Линейная функция $y=kx+b$, где k и b – любые действительные числа.	$x \in R$
2	Квадратная функция $y=ax^2+bx+c$, где a, b и c – любые действительные числа, $a \neq 0$.	$x \in R$
3	Степенная функция $y = x^p$	Если $p \in N$, то $x \in R$ Если $p \in Z, p<0$, то $x \neq 0$ Если $p > 0, p \in R$, то $x \geq 0$ Если $p < 0, p \in R$, то $x > 0$
4	Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$x \in R$
5	Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$x > 0$
6	Тригонометрические функции	
	$y = \sin x$	$x \in R$
	$y = \cos x$	$x \in R$

	$y = tgx$	$x \neq \frac{\ }{2} + \ k, k \in Z$

	$y = ctgx$	$x \neq k,\ k \in Z$
7	Обратные тригонометрические функции	
	$y = \arcsin x$	$-1 \leq x \leq 1$
	$y = \arccos x$	$-1 \leq x \leq 1$
	$y = arctgx$	$x \in R$
	$y = arcctgx$	$x \in R$
8	Дробно-рациональная функция $y = \dfrac{k_1 x + b_1}{k_2 x + b_2}$	$x \neq -\dfrac{b_2}{k_2}$

Решим примеры 1.1 – 1.6.

Уравнение	ООУ	МРУ	Опорные знания
$x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 1$	$x > 0$	$x > 0$	Область определения степенной функции с действительным показателем
$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	$x \in R$	$x \in R$	Область определения степенной функции и понятие модуля числа
$\log_x x = 1$	$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$	Понятие логарифмической функции и её область определения
$\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x$	$x \neq k,\ k \in Z$	$x \neq k,\ k \in Z$	Области определения функции $y = ctgx$ и дробно-рациональной функции
$\dfrac{x}{x} = 1$	$x \neq 0$	$x \neq 0$	Область определения дробно-рациональной функции

Приступая к обучению решению уравнений рассматриваемого вида, следует учить учащихся:

1) выделять «опасные операции» над переменной x , содержащиеся в записи уравнения (под «опасными операциями» понимаем те операции, которые требуют ограничений: извлечение корня чётной степени, деление на выражение с переменной, логарифмирование, возведение в степень, «взятие» тангенса, котангенса, арксинуса и арккосинуса);
2) составлять и решать систему ограничений.

Задания для самостоятельной работы

Решите уравнения:

1.7 $tgx \cdot ctgx = 1$

1.8 $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

1.9 $tg(arctgx) = x$

1.10 $\sin(\arcsin x) = x$

1.11 $\sin^2\sqrt{1-x^2} + \cos^2\sqrt{1-x^2} = 1$

1.12 $x^{2k} \cdot x^{-2k} = 1, k \in N$

1.13 $x^{\frac{e}{4}} \cdot x^{-\frac{e}{4}} = 1$

1.14 $x^{\bar{5}} \cdot x^{-\bar{5}} = 1$

1.15 $\log_{0,1}(x+4) + \log_{0,1}(x-4) = \log_{0,1}(x^2-16)$

1.16 $\left(\sqrt{-\cos x}\right)^2 = -\cos x$

1.17 $\sqrt[4]{ctg^4 x} = |ctgx|$

1.18 $\log_2 x^6 = 6\log_2|x|$

1.19 $\frac{1}{|\cos x|} = \sqrt{1+tg^2 x}$

1.20 $\sqrt{x-4} + 2\sqrt{-x} = 1$

1.21 $(x^2-3x-4)^2(x^2-3x-4)^{-2} = 1$

1.22 $\log_3(x+1) - \log_3(-x-1) = \log_3\frac{x+1}{-x-1}$

Ответы:

1.7 $x \neq \frac{}{2}k, k \in Z$

1.8 $x \neq 0$

1.9 $x \in R$

1.10 $|x| \leq 1$

1.11 $|x| \leq 1$

1.12 $x \neq 0$

1.13 $x > 0$

1.14 $x > 0$

1.15 $x > 4$

1.16 $\left[\frac{}{2} + 2k; \frac{3}{2} + 2k\right], k \in Z$

1.17 $x \neq k, k \in Z$

1.18 $x \neq 0$

1.19 $x \neq \frac{}{2} + k, k \in Z$

1.20 $x \in \varnothing$

1.21 $x \neq -1, \quad x \neq 4$

1.22 $x \in \varnothing$

2. <u>Уравнения, при решении которых используются прогрессии</u>

Обобщение и систематизацию теоретического материала поарифметической и геометрической прогрессиям представим в виде таблицы. Таблица состоит из 3 столбцов и включает в себя следующие единицы рассматриваемой теории:

- определения последовательностей,
- формулы *n*-го члена,
- формулы суммы *n* первых членов,
- характеристические свойства прогрессий.

Теория прогрессий

Прогрессии	Арифметическая	Геометрическая	
1) Определение понятий	-*числовая последовательность,* каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, *сложенному с одним и тем же числом* **d.** Число **d** называется *разностью* арифметической прогрессии. Обозначается: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, где $a_{n+1} = a_n + d$.	-*числовая последовательность,* каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число **q,** не равное нулю**.** Число **q** называется *знаменателем* геом.прогрессии. Обозначается: $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, где $b_{n+1} = b_n * q$.	Если модуль знаменателя **q** *меньше единицы,* то геометрическая. прогрессия называется **бесконечно убывающей.** Т.е. при $\mid q \mid < 1$.
2) Примеры прогрессий	1). 1, 2, 4, 6, 8, 10 , … , 2n. 2). 1, 3, 5, 7, 9, 11. 3). 7, 7, 7, 7, 7. 4). 1/3, 2/3, 1, 4/3 , … .	1) 1, 2, 4, 8, 16, …, 2^n 2) -3, 9, -27 , 81 , -243 ,… 3) 2, 7 , 24.5 , 85.75. 4) 5, 5, 5, 5, …	1) 2, 1, ½, ¼, … 2) 1 ,2/3, 4/9… 3) -16, -8, -4, … 4) 100, -10, 1.
	<u>Для того, чтобы выяснить является ли последовательность:</u>		
3) Алгоритмы распознавания прогрессий	♦ *арифметической прогрессией,* 1) Найти разность d между первым и вторым членами последовательности. 2) Проверить, каждый ли ее элемент, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d. 3) Сделать вывод.	♦ *геометрической* необходимо: 1) Найти частное q от деления первого члена на второй последовательности. 2) Проверить, каждый ли ее элемент, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q. 3) Сделать вывод.	♦ *бесконечно убывающей геом.прогрессией* необходимо проверить что: 1) данная последовательность имеет бесконечное число членов; 2) последовательность -геометрическая, 3) что $\mid q \mid < 1$.
4) Характеристическое свойство прогрессий	Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен*среднему арифметическому*двух соседних с ним членов: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ …(1)…	Каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен*среднему геометрическому* двух соседних с ним членов: $\mid b_n \mid = b_{n-1} * b_{n+1}$ …(2)…	

5) Типы задач на применение свойства прогрессий	1) Даны два числа: 11 и 35. Какое число, лежащее между ними, нужно выбрать, чтобы полученные три числа составляли арифметическую прогрессию?	1) Какое число нужно поместить между числами 3 и 243, чтобы три числа составляли геометрическую прогрессию?
6) Алгоритмы решения задач на характер. свойство	Для того, чтобы найти элемент a_2, лежащий между данными элементами a_1 и a_3, такой что элементы a_1, a_2, a_3 составляют арифметическую прогрессию, необходимо: 1) Подставить известные данные в формулу (1), 2) Вычислить искомый элемент. 3) Сделать вывод.	Для того, чтобы найти число, располагающееся между известными числами b_1 и b_3, такое что получившиеся три числа будут составлять геометрическую прогрессию b_1, b_2, b_3 необходимо: 1) Подставить известные данные в формулу (2), 2) Вычислить, то искомое число. 3) Сделать вывод.
7) Формулап–гочлена	$\mathbf{a}_{\mathbf{n}}=a_1+(n-1)\cdot d$	$\mathbf{b}_{\mathbf{n}}=b_1 * q^{n-1}$
8) Типы задач на применение формулы n – го члена	1). Дана арифметическая прогрессия 13, 11, 9, … . Найти ее 31 –й член.	1). Дана геометрическая прогрессия ¼, ½, 1, … .Найти ее 9 –й член.
	2). Найти первый член арифметической прогрессии , если $d = -3$, $a_{11} = 20$.	2). Найти первый член геометрической прогрессии, если $q=2$, $b_4 =32$.
	3). Найти разность арифметической прогрессии , если $a_1 =7$, $a_{16} =67$.	3). Найти знаменатель геометрической прогрессии, если $b_1=2$, $b_5 =162$.
	4). Число -22 является членом арифметической прогрессии 44 , 38, 32,… Найти номер этого члена.	4). Число 162 является членом геометрической прогрессии 2, 6 , 18 , … Найти номер этого члена.

<table>
<tr><td>9) Алгоритмы решения задач на применение формулы n –го члена</td><td colspan="2">Для того, чтобы <u>найти а $_n$</u> (или a_1 , или n, или d) <u>данной прогрессии</u> необходимо:
1) Найти или указать:
• первый член a_1 , разность d и номер искомого элемента n (или (d, a_n и n) , или ($a_1 d$), или (a_1, a_n и n)).
2)Подставить найденные значения в формулу n –го члена.
3)Найти значение a_n(или a_1, или n, или d).
4)Записать ответ.</td><td colspan="2">Для того, чтобы <u>найти</u> b_n(или b_1 , или n, или q) <u>данной прогрессии</u> необходимо:
1)Найти или указать:
• первый член b_1 , знаменатель q и номер искомого элемента данной прогрессии n (или (q, b_n и n) , или ($b_1 q$), или (b_1, b_n и n)).
2)Подставить найденные значения в формулуn –го члена.
3)Найти значение b_n(или b_1, или n, или q).
4)Записать ответ.</td></tr>
<tr><td>10) Сумма n первых членов прогрессий</td><td colspan="2">$\mathbf{S_n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n =$
$= n \cdot (a_1 + a_n) / 2$
или
$\mathbf{S_n} = n \cdot [\, 2a_1 + d(n-1)\,] / 2$</td><td>$\mathbf{S_n} = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$.
$\mathbf{S_n} = b_1 \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$</td><td>$\mathbf{S} = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$.
$\mathbf{S} = b_1 \cdot \dfrac{1}{1 - q}$.</td></tr>
<tr><td>11) Типы задач на применение формулы суммы n первых членов</td><td colspan="2">1) Найти сумму девяти первых членов арифметической прогрессии
9, 13, 17,…
2) Найти a_{14} и d арифметической прогрессии, если a_1=10, S_{14} =1050.
3) Найти a_1 арифметической прогрессии, если a_7 = 21, S_7 =205 .
4) Найти n в арифметической прогрессии 3, 5, 7 , 9, …, если S_n = 63 .</td><td>1) Найти сумму первых семи членов геометр.прогрессии 5, 10, 20,…
2) Найти b_8 геометрической прогрессии, если S_8 = 85, q = –2 .
3)Найти b_1 геометрической прогрессии, если S_7 = 635 , q = 2 .
4)Найти n в геометрической прогрессии 7, 21, 63, …, если S_n =847 .</td><td>1) Найти сумму прогрессии -25, -5, -1, … .
2) Найти b_1 член, если q =1/2 , S =320.
3)Найти q бесконечно убыв.геом. прогрессии , если b_1= 40 , S =60 .</td></tr>
</table>

12) Алгоритм решения задач на применение формулы суммы n первых членов прогрессий	Для того, чтобы *найти суммуп первых членов* S_n прогрессии (или первый член a_1,или n –й член a_n , или *ее разность* d, или *количество членовп*) необходимо: **1)** Найти или указать: • первый член a_1, разность d и n –количество членов (или (S_n, n, d), или(a_1, S_n, n), или (a_1, n , S_n) , или (a_1, d , S_n)). 2) Подставить найденные значения в формулу суммы n первых членов прогрессии. 3) Решить полученное уравнение, относительно неизвестного. **4)** Записать ответ.	Для того, чтобы *найти суммуппервых членов* S_n прогрессии (или первый член b_1,или n –й член b_n, или *ее знаменатель* q,или *количество членов* n)необходимо: **1)** Найти или указать: • первый член b_1, знаменатель q и n – количество членов (или (q, S_n , n), или(q, S_n , n, b_1), или (b_1, S_n , n), или (b_1, S_n, q)). **2)** Подставить найденные значения в формулу суммы n первых членов прогрессии. **3)** Решить полученное уравнение, относительно неизвестного. **4)** Записать ответ.	Для того, чтобы *найти сумму S* (или b_1, или q) необходимо: 1) Найти или указать: • b_1 и q (или (S, q), или (S, b_1)). 2) подставить найденные значения в формулу суммы. 3) Решить полученное уравнение. 4) Записать ответ.

Рассмотрим примеры.

Рациональные уравнения

П **р и м е р 2 . 1**Решить уравнение:

$$2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots=\frac{13}{6},\ где\ |x|<1.$$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$(2x+1)+\left(x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots\right)=\frac{13}{6}.$$

Во второй скобке – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с $g=-x$.

$$2x+1+\frac{x^2}{1-(-x)}=\frac{13}{6}\quad\Rightarrow\quad 2x+1+\frac{x^2}{1+x}=\frac{13}{6}$$

$$12x+12x^2+6x^2+6x+6=13+13x\Rightarrow\quad 18x^2+5x-7=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+504}}{36}=\frac{-5\pm23}{36}$$

$$x_1=\frac{1}{2},\qquad x_2=-\frac{7}{9}$$

Ответ: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{7}{9}$.

П р и м е р 2 . 2 . Найти все решения уравнения:

$$\frac{1}{x} + x + x^2 + \quad + x^n + \quad = 3,5 \qquad |x| < 1$$

<u>Решение.</u>

Заменим данное уравнение ему равносильным

$-9x^2 - 9x + 2 = 0$,т.к. $x + x^2 + \quad = \frac{x}{1-x}$ по формуле убывающей прогрессии. Решим полученное уравнение

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{18} = \frac{9 \pm 3}{18} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{1}{3}.$$

Найденные значения x удовлетворяют условию $|x| < 1$.

Ответ: $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. $x = \frac{2}{3}$.

П р и м е р 2 . 3 .Найти все решения уравнения:

$$\left(x^2 + x + 1\right) + \left(x^2 + 2x + 3\right) + \quad + \left(x^2 + 20x + 39\right) = 4500.$$

<u>Решение.</u>

Левая часть уравнения – сумма арифметической прогрессии, в которой $a_1 = a^2 + x + 1,\ d = x + 2,\ a_n = x^2 + 20x + 39$.

Используя формулу общего члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d\,(n-1)$,найдём число слагаемых в левой части исходного уравнения:

$$x^2 + 20x + 39 = x^2 + x + 1 + (x+2)n - x - 2; n = \frac{20x + 40}{x+2} = 20.$$

Тогда по формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ преобразуем левую часть исходного уравнения и получим:

$$\frac{x^2 + x + 1 + x^2 + 20x + 39}{2} \cdot 20 = 4500;$$

$$2x^2 + 21x + 40 = 450 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 21x - 410 = 0;$$

$$x_1 = \frac{-21 \pm \sqrt{441 + 3280}}{4} = \frac{-21 \pm 61}{4};$$

$$x_1 = -20,5; \qquad x_2 = 10.$$

Ответ: $x_1 = -20,5$; $x_2 = 10$.

П р и м е р 2 . 4 . Найти все решения уравнения $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \quad + \frac{1}{x} = 3.$

<u>Решение.</u>

Левая часть уравнения – сумма арифметической прогрессии, в которой $a_1 = \frac{x-1}{x},\ d = -\frac{1}{x},\ a_n = \frac{1}{x}$.

По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ найдём число слагаемых в левой части исходного уравнения:

$$\frac{1}{x} = \frac{x-2}{x} - \frac{1}{x}n + \frac{1}{x};$$

$$n = \frac{x-1}{x}\cdot x;$$

$$n = x - 1.$$

По формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$ преобразуем левую часть исходного уравнения.

$$S = \frac{\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x}}{2}(x-1);$$

$$\frac{x-1+1}{\ }(x-1) = 32x \Rightarrow x-1=6 \Rightarrow x=7$$

Ответ: $x=7$.

П р и м е р 2 . 5 .Найти все решения уравнения $x-1 + x-3 + \quad + x-27 = 70$.
Решение.

В левой части уравнения – сумма членов арифметической прогрессии, где $a_1 = x-1, a_n = x-27$.

Найдём разность данной прогрессии $d = x-3-x+1 = -2$. По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ найдём n:

$$x - 27 = -1 - 2\cdot(n-1);$$

$$-26 = -2\cdot(n-1);$$

$$n = 14.$$

По формуле суммы n-первых членов арифметической прогрессии, найдём сумму для данной прогрессии:

$$S_n = \frac{1}{\ }\cdot(x-1+x-27)\cdot 14 = (x-14)\cdot 14 = 70;\ 2$$

$$x - 14 = 5;$$

$$x = 19.$$

Ответ: $x=19$.

П р и м е р 2 . 6 .Найти все решения уравнения $81\cdot 0,(5)^{x-1} = 25$. Решение.

Представим $0,(5)$ в виде обыкновенной дроби, используя формулу $S = \frac{b1}{1-q}$, где $|q|<1$.

$$0,(5) = 0,5 + 0,05 + 0,005 +$$

$$b_1 = 0{,}5,\quad b_2 = 0{,}05,\quad q = \frac{1}{10} \quad\Rightarrow\quad S = \frac{0{,}5}{1-\frac{1}{10}} = \frac{5}{9}$$

имеем $81\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^{x-1} = \frac{25}{81} \quad\Rightarrow\quad x-1=2 \quad\Rightarrow\quad x=3.$

Ответ: $x=3$.

<u>Показательные и логарифмические уравнения</u>

П **р и м е р 2 . 7**.Решить уравнение

$$3^{x-5}+3^{x-7}+3^{x-9}=45{,}5+22{,}75+11{,}375+$$

<u>Решение.</u>

Данное уравнение является показательным, причём в правой части записана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1=45{,}5$ и $q=\frac{22{,}75}{}=0{,}5$.

1) Найдём сумму данной прогрессии по формуле суммы бесконечно убывающей прогрессии: $S=\frac{45{,}5}{1-0{,}5}=91$.

2) Запишем уравнение в следующем виде $3^{x-5}+3^{x-7}+3^{x-9}=91$ или $3^{x-9}\cdot\left(3^4+3^2+1\right)=91$,произведём необходимые вычисления и получим,что $3^{x-9}\cdot 91=91$ или $3^{x-9}=1$,или $3^{x-9}=3^0$,отсюда$x-9=0$,или$x=9$.

Ответ: $x=9$.

П **р и м е р 2 . 8** .Решить уравнение$\lg x+\lg x^2+\lg x^4+\ \ +\lg x^{256}=5$.

<u>Решение.</u>

Заметим, что в левой части уравнения – сумма десятичных логарифмов.

1) ООУ: $x>0$.
2) Пользуясь свойством логарифма, преобразуем данное уравнение:

$$\lg x+2\cdot\lg x+4\cdot\lg x+\qquad+256\lg x=5\ .$$

3) Заметим, что в левой части уравнения записана сумма геометрической прогрессии, у которой $b_1=\lg x, q=2$; используя формулу n-го члена геометрической прогрессии $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$, найдём количество n членов данной прогрессии:

$$\lg x^{256}=\lg x\cdot 2^{n-1}, \text{т.ё.} \lg x^{256}=\lg x^{2n-1}, \text{отсюда} x^{256}=x^{2n-1}, \text{тогда}$$

$$2^9=2^{n-1}\Rightarrow\qquad 9=n-1, \text{следовательно}, n=9\ .$$

4) Применим формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n=b_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$ для заданной суммы:

$$\lg x \cdot \frac{1-2^9}{1-2} = 5,\text{ тогда } \lg x = \frac{5}{511},\text{ следовательно,}$$

$x = 10^{\frac{5}{511}} = 10^{0,0098} = 1,023$, что удовлетворяет ООУ.

Ответ: $x = 1,023$.

П р и м е р 2 . 9 .Найти x,если числа $\lg 2,\ \lg\left(2^x - 1\right),\ \lg\left(2^x + 3\right)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

<u>Решение.</u>

Т.к. числа $\lg 2,\ \lg\left(2^x - 1\right),\ \lg\left(2^x + 3\right)$ образуют арифметическую прогрессию, то для них выполняется характеристическое свойство, т.е.

$$2 \cdot \lg\left(2^x - 1\right) = \lg 2 + \lg\left(2^x + 3\right).$$

1) Решим полученное логарифмическое уравнение.

1.1) ООУ:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 2^x - 1 > 0, \\ 2^x + 3 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 2^x > 1, \\ 2^x > -3; \end{cases} \Rightarrow \quad x > 0.$$

1.2) $\left(2^x - 1\right)^2 = 2 \cdot \left(2^x + 3\right)$, раскроем скобки

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 2 \cdot 2^x + 6 \quad \Rightarrow \quad 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 5 = 0,$$

обозначим $2^x = t$, причём $t > 0$, тогда

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3.$$

Следовательно, $t_1 = 5, t_2 = -1$.

$t_2 = -1 < 0$, не удовлетворяет условию $t > 0$.

Значит $2^x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \log_2 5$.

2) $x = \log_2 5$ – полученное значение удовлетворяет ООУ, следовательно, можно записать ответ.

Ответ: $x = \log_2 5$.

<u>Тригонометрические уравнения</u>

П р и м е р 2 . 1 0 .Показать,что значения функцииtg углов $\frac{\ }{6}, \frac{\ }{4}, \frac{\ }{3}$ образуют возрастающую геометрическую прогрессию.

<u>Решение.</u>

Необходимо показать, что значения функции tg углов $\frac{\ }{6}, \frac{\ }{4}, \frac{\ }{3}$ образуют возрастающую геометрическую прогрессию.

1) Найдём значения функции tg при значениях, $\frac{\ }{6}, \frac{\ }{4}, \frac{\ }{3}$.

$$tg\left(\frac{\ }{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$tg\left(\frac{\ }{4}\right) = 1,$$

$$tg\left(\frac{\ }{3}\right) = \sqrt{3}.$$

2) Для того чтобы проверить является ли последовательность значений функции tg возрастающей геометрической прогрессией, проверим выполнимость характеристического свойства:

$$^{2}_{1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\sqrt{3},$$

$1 = \frac{3}{3}$ или $1=1$, действительно данная последовательность является геометрической прогрессией.

3) Т.к. $\frac{3}{\sqrt{3}} > 1$,то данная геометрическая прогрессия является возрастающей.

Ответ: значения функции tg углов $\frac{\ }{6}, \frac{\ }{4}, \frac{\ }{3}$ образуют возрастающую геометрическую прогрессию.

П р и м е р 2 . 1 1 .Найти всем значениях x,удовлетворяющие неравенству $tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$,при которых числа $2^{\cos\left(5x-\frac{3\pi}{4}\right)}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}$, $\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{5\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.

<u>Решение.</u>

Необходимо найти все значения x, удовлетворяющие неравенству $tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$,при которых числа $2^{\cos\left(5x-\frac{3\pi}{4}\right)}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}$, $\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{5\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.

1) Если данные числа составляют геометрическую прогрессию, то для них должно выполняться характеристическое свойство:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}=2^{\cos\left(5x-\frac{3\pi}{4}\right)}\cdot\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{5\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

2) Решим полученное уравнение:

$$2^{2\cdot\left(-\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=2^{\cos\left(5x-\frac{3\pi}{4}\right)}\cdot 2^{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$-2\cdot\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(5x-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$-2\cdot\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot(1-\sin 2x)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\\ 1-\sin 2x=0,\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3},\\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\end{array}\right.\qquad n,k\in Z.$$

3) Остаётся проверить условие задачи, что $tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$,

очевидно что серия $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$ не удовлетворяет этому равенству.

4) Для серии $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3}$ имеем $tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=tg\frac{\pi k}{3}>0$,при $k=3m+1$, что и даёт решение $x=\frac{7\pi}{12}+\pi m$, где $m\in Z$.

Ответ: $x=\frac{7\pi}{12}+\pi m$, где $m\in Z$.

П р и м е р 2 . 1 2 .Решить уравнение

$$\frac{1+tgx+tg^2x+\quad+tg^nx+}{1-tgx+tg^2x+\quad+(-1)^n tg^nx+}=1+\sin 2x, \qquad где\ |tgx|<1.$$

<u>Решение.</u>

Дано тригонометрическое уравнение, причём и в числителе, и в знаменателе левой части уравнения записана сумма бесконечно убывающей прогрессии.

1) ООУ: $x\neq \ \text{—}+\ k,\ где\ k\in Z.$

2) Упростим числитель и знаменатель, используя формулу суммы бесконечно убывающей прогрессии $S=\frac{b_1}{(1-q)}$, тогда получим

$$\frac{\frac{1}{(1-tgx)}}{\frac{1}{(1+tgx)}}=1+\sin 2x \quad\Rightarrow\quad \frac{1+tgx}{1-tgx}=1+\sin 2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}-(\cos x+\sin x)^2=0, \qquad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0,\\ \frac{1}{\cos x-\sin x}-(\cos x+\sin x)=0.\end{array}\right.$$

Первое уравнение не имеет корней, т.к. по условию $|tgx|<1$, а второе равносильно уравнению $\cos 2x=1, x=n, n\in Z$.

3) Полученное решение удовлетворяет ООУ.

Ответ: $x=n, n\in Z$.

П **р и м е р 2 . 1 3 .** Даны три последовательных члена арифметической прогрессии $\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x$.Найти x.

<u>Решение.</u>

1) Так как данные числа являются последовательными членами арифметической прогрессии, то для них выполняется характеристическое свойство: $2\cdot\sin 2x=\sin x+\sin 3x$.

2) Решим полученное уравнение:

$$2\cdot\sin 2x=\sin x+\sin 3x\quad\Rightarrow\qquad 2\cdot\sin 2x=2\cdot\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \sin 2x=\sin 2x\cdot\cos x\quad\Rightarrow\quad \sin 2x\cdot(1-\cos x)=0\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0,\\ \cos x=1;\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2x=n,\\ x=2\ k;\end{array}\right.\ {}_{n,k\in Z}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{n}{2},\\ x=2\ k\end{array}\right.;\ \Rightarrow x=\frac{n}{2},\ n\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{n}{2}, n\in Z.$

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ и указания
Решить уравнения 1-4, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=\frac{b_1}{1-g}$, *где* $\lvert g\rvert<1$	
1. $\sqrt[x]{12}\cdot\sqrt[x]{3}=4+\frac{4}{3}+\frac{4}{9}+$	$x=2.$
2. $\left(\sqrt{12}\right)^x\cdot\left(\sqrt{3}\right)^x=12+8+\frac{16}{3}+$	$x=2.$
3. $2^{x^2+2x+5}=8+4+2+$	$x=-1.$
4. $(0,5)^{x^2-5,5}\cdot\sqrt{0,5}=16+8+4+$	$x=0.$
Решить уравнения	
5. $\frac{(x-1)}{x^2}+\frac{x-2}{x^2}+\quad+\frac{x-3}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{7}{15}$	$x=15.$
6. $1+x+x^2+x^3+\quad=2$	$x=\frac{1}{2}.$
7. $(x+1)+(x+4)+(x+7)+\quad+(x+28)=155$	$x=1.$
8. $\frac{2x^2+2}{x}+2x-2x^3+2x^5-2x^7+\quad=\frac{29}{5}$	$x=\frac{1}{2}.$
9. $5^2\cdot 5^4\cdot 5^6\cdot\quad\cdot 5^{2x}=0{,}04^{-28}$	$x=7.$
10. $\log_k x+\log_{k^{\frac{1}{2}}} x+\quad+\log_{k^{\frac{1}{k}}} x=\frac{k+1}{2}$, *где* $k\in N$	$x=k^{\frac{1}{k}}$, *при* $k>0,\ k\neq 1$
11. При каких значениях x и y последовательность t_1, t_2, t_3, *где* $t_1=8^{x+\log_2 y}$, $t_2=2^{x-\log_2 y}$, $t_3=5\cdot y$, является одновременно арифметической и геометрической прогрессией.	$x=\frac{1}{2}\log_2 5,\ y=5^{-\frac{1}{4}}.$
12. Определить при каких значениях x числа a_1,a_2,a_3, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию: $a_1=\lg 2,\ a_2=\lg\left(3^x-3\right),\ a_3=\lg\left(3^x+9\right)$ 13. Три числа a, b, c являются	$x=2.$
последовательными членами геометрической прогрессии. Найти $$\frac{\log_b 3\cdot\left(\log_a{}^2 c-\log_c a^2\right)^{\frac{1}{}}}{\log_a 9-2\cdot\log_c 3}$$	$\frac{1}{2}$.
14. Найти все значения x, при которых числа $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{3\cos\left(5x+\frac{3}{4}\right)}$, $\left(\frac{1}{}\right)^{\cos\left(3x+\right)}$, $5^{\left(\quad\frac{}{4}\right)}$ в указанном порядке	$x=\frac{}{12}+2m,$ 5

составляют возрастающую геометрическую прогрессию.	$x=\frac{}{12}+2k$, где $k,m\in$
15. Решить уравнение $\frac{1+\sin x+\sin^2x+\ldots+\sin^n x+\ldots}{1-\sin x+\sin^2 x+\ldots+(-1)^n\sin^n x+\ldots}=\frac{1}{1+tg^2x}$, где $\lvert\sin x\rvert\neq 1$	$x=n,\ n\in Z$.
16. При каких значениях числа $2\cdot\cos\frac{}{6},\ 4\cdot\sin,\ 6\cdot\sin(-)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?	$=(-1)^n\frac{}{3}+n,\ n\in Z$.
17. Числа $1-\cos 2x,\ \cos x-\frac{1}{2},\ \sin(\frac{1}{2}-2x)$ являются членами геометрической прогрессии с номерами k, $k+1$, $k+2$ соответственно. Найти все значения x и k, если известно, что 15-й член этой прогрессии равен $\frac{27}{8}$.	$x=\pm\frac{2}{3}+2m,\ m\in Z$ $k=17$
18. Найти положительные значения a, для которых все различные неотрицательные x, удовлетворяющие уравнению $\cos((8a-3)\cdot x)=\cos((14a+5)\cdot x)$ и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.	$a\in\left\{\frac{1}{30},\frac{2}{19},\frac{37}{85},\frac{11}{2}\right\}$.

3. Уравнения, при решении которых используется ограниченность функций

Теоретической базой решения уравнений с использованием ограниченности функций являются понятие ограниченности функции, сопутствующие понятия и специальная теорема.

Определение 1. *Функцию $y=f(x)$ называется ограниченной на промежутке J, если существуют числа A и B такие, что для всех значений $x\in J$ справедливо неравенство $A\le f(x)\le B$.* (*)

Из этого определения следует, что если функция $y=f(x)$ на промежутке J принимает своё наименьшее значение m и наибольшее значение M, то она ограничена на промежутке J, для этого достаточно положить $A=m$, $B=M$.

Функции, не являющиеся ограниченными на промежутке J, называются неограниченными. Иногда функция $y=f(x)$ на промежутке J удовлетворяет только одному из неравенств (*). В связи с этим введем ещё одно определение.

Определение 2. *Если существует число A, такое, что для всех $x\in J$ выполняется неравенство $f(x)\ge A$, то функция $y=f(x)$ называется ограниченной снизу на промежутке J.*

Если же существует число B, такое, что для всех $x\in J$ выполняется неравенство $f(x)\le B$, то функция $y=f(x)$ называется ограниченной сверху.

Примеры.

1) $y=\cos x$ - функция ограниченная, т.к. для всех $x\in R$ справедливо неравенство

$-1 \le \cos x \le 1$.

2) $y=x$ - функция ограниченная снизу, т.к. для всех $x \in R$ справедливо неравенство $x \ge 0$.

3) $y = -x^2+2-6x$ - функция ограниченная сверху, т.к. для всех $x \in R$ справедливо неравенство $y \le 11$. (Дана квадратичная функция с коэффициентом $a = -1 < 0$ и абсциссой вершины $x_0 = -\frac{-6}{-2} = -3$, при $x \in R$ $y \le y(x_0)$, где $y(x_0) = -9+2+18=11$).

Исследуйте на ограниченность следующие функции.

1	$y = \lvert\sin 2x\rvert$	6	$y = \cos^2 \frac{x}{2}$
2	$y = \log_3(x^2-4x+7)$	7	$y = 4 - \sin x$
3	$y = \arcsin x$	8	$y = {}^1\!/_4{}^{\sin x \cos x}$
4	$y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$	9	$y = \sqrt{tg^2 x + 3}$
5	$y = \sqrt{x-1}$	10	$y = \left\lvert \log_{\frac{1}{2}} x \right\rvert$

Ответы:

Обучая учащихся понятию ограниченности функции:

1	$0 \le y \le 1$	6	$0 \le y \le 1$
2	$y \ge 1$	7	$3 \le y \le 5$
3	$-\frac{}{2} \le y \le \frac{}{2}$	8	$\frac{1}{2} \le y \le 2$.Так как $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$; $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{1}{2}$, значит $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\sin 2x} \le \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$.
4	$y \ge 2$.Воспользоваться свойством $t + \frac{1}{t} \ge 2,\ t > 0$	9	$y \ge \sqrt{3}$
5	$y \ge 0$	10	$y \ge 0$

1) Составить совместными усилиями обобщающую таблицу множеств значений функций (МЗФ):

Функция	ООФ	МЗФ
$y = kx + b$	$x \in R$	$y \in R$, *если* $k \ne 0$ $y = b$, *если* $k = 0$
$y = a^2 x + bx + c$	$x \in R$	$a > 0$, $y \ge y(x_0)$, $x_0 = -\frac{b}{2}$

		$a<0,\ y \le y(x_0),\ x_0 = -\frac{b}{2a}$
x		
$y=a^x$	$x \in R$	$y>0$
$y=\log_a x$	$x>0$	$y \in R$
$y=\sin x$	$x \in R$	$y \in [-1;1]$
$y=\cos x$	$x \in R$	$y \in [-1;1]$
$y=tgx$	$x \ne \frac{}{2} + k,\ k \in Z$	$y \in R$
$y=ctgx$	$x \ne k,\ k \in Z$	$y \in R$
$y=\arcsin x$	$x \in [-1;1]$	$y \in \left[-\frac{}{2};\frac{}{2}\right]$
$y=\arccos x$	$x \in [-1;1]$	$y \in [0;]$
$y=arctgx$	$x \in R$	$y \in \left(-\frac{}{2};\frac{}{2}\right)$
$y=arcctgx$	$x \in R$	$y \in (0;)$

2) Отработать умения пользоваться ею и умения находить множества значений сложных функций: $y=f(|x|)$; $y=\sqrt{f(x)}$; $y=\log_a f(x)$; $y=a^{f(x)}$; $y=f(\sin x)$ и т.д.

Введём специальную **теорему**, используемую при решении некоторых нестандартных уравнений.

Если функция $f(x)$ *на промежутке X ограничена сверху, причём её наибольшее значение равно A, а другая функция* $g(x)$ *на этом промежутке ограничена снизу, причём её наименьшее значение равно A, то уравнение* $f(x)=g(x)$ *равносильно системе* $\begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=B. \end{cases}$

Из теоремы следует **алгоритм решения уравнений методом оценки** или методом использования экстремальных значений функций:

1) *найти область определения уравнения;*
2) *оценить левую и правую части данного уравнения;*
3) *если функции, стоящие в левой и правой частях уравнения, удовлетворяют сформулированной теореме, то вместо данного уравнения решать соответствующую систему уравнений..*

Рассмотрим примеры уравнений, решаемых с использованием метода оценки.

П **р и м е р 3 . 1** .Решить уравнение $4\cos=4+x^2$.<u>Решение</u>Оценим левую и правую части уравнения:

$$f(x)=4\cos x, \qquad -4 \le 4\cos x \le 4.$$

$$g(x)=4+x^2, \qquad 4+x^2 \ge 4.$$

Так как левая и правая части уравнения удовлетворяют условию теоремы, то данное уравнение можно заменить системой: $\begin{cases} 4\cos x = 4 \\ 4 + x^2 = 4. \end{cases}$ Из второго уравнения находим $x=0$. Подставив $x=0$ в первое уравнение, получаем верное числовое равенство, следовательно, $x=0$ - корень данного уравнения.

Ответ: $x=0$.

П р и м е р 3 . 2 .Решить уравнение $e^{x^2}+4=\sqrt[6]{64-x^4}+\log_3(27-x^2)$.

Решение

Оценим левую и правую части уравнения:

$f(x)=e^{x^2}+4$, т.к. $e^{x^2}\ge 1$, то $e^{x^2}+4\ge 5$;

$g(x)=\sqrt[6]{64-x^4}+\log_3(27-x^2)$, т.к. $0\le\sqrt[6]{64-x^2}\le 2$, $27-x^2\le 27$, $\log_3(27-x^2)\le 3$, то $g(x)\le 5$.

Так как условие теоремы выполняется, заменим данное уравнение равносильной ему системой уравнений $\begin{cases} e^{x^2}+4=5, \\ \sqrt[6]{64-x^4}+\log_3(27-x^2)=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ 2+3=5. \end{cases}$

Ответ: $x=0$.

П р и м е р 3 . 3 .Решить уравнение $\sin^2 2x+\cos^6\frac{x}{2}+6\sin 5x=9$.

Решение

Так как левая часть уравнения принимает значения не больше 8, а правая часть равна 9, то данное уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

П р и м е р 3 . 4 .Решить уравнение $2\cos^2\frac{x^2+x}{6}=2^x+2^{-x}$.

Решение

Данное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} 2\cos^2\frac{x^2+x}{6}=2, \\ 2^x+2^{-x}=2. \end{cases}$ При оценке выражения 2^x+2^{-x} воспользовались неравенством $t+\frac{1}{t}\ge 2$, где $t=2^x, t>0$, которое можно доказать. Из второго уравнения системы следует, что $x=0$, которое удовлетворяет первому уравнению.

Ответ: $x=0$.

Анализируя решённые примеры, можно сделать вывод, о том, что **метод оценки** можно применять:

1. *если в одной части уравнения функция, ограниченная сверху, а в другой, ограниченная снизу* (примеры: 3.1; 3.2; 3.4);
2. *если в уравнении содержатся функции разного вида* (примеры: 3.1; 3.2; 3.4);
3. *если в одной части уравнения ограниченная функция, а в другой – константа* (пример 3.3).

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ и указания
1. $3^{\lvert\sin\sqrt{x}\rvert}=\lvert\cos x\rvert$	$x=0$. Данное уравнение равносильно

	системе $\begin{cases} 3^{\lvert\sin\sqrt{x}\rvert} = 1, \\ \lvert\cos x\rvert = 1. \end{cases}$.
2. $\sin\frac{x}{3} - \cos 6x = 2$	$x = \frac{3}{2}\quad + 6\ n,\ n\in Z.$ Свести исходное уравнение к системе: $\begin{cases} \sin\frac{x}{3} = 1, \\ \cos 6x = -1. \end{cases}$
3. $\sin\left(x + \frac{\ }{3}\right)\sin 3x = 1$	$x = \frac{\ }{6} + k\ ,\ k \in Z\ .$ Свести исходное уравнение к совокупности систем.
4. $\log_2\left(x^2 + 4\right) - \log_2 x = 4x - x^2 - 2$	$x = 2.$ Заменив в области определения уравнения ($x > 0$) данное уравнение на равносильное $\log_2\left(x + \frac{4}{x}\right) = 4x - x^2 - 2$, оценим левую и правую части полученного уравнения. Т.к. $x + \frac{4}{x} \ge 4$, то $f(x) = \log_2\left(x + \frac{4}{x}\right) \ge 2$; $4x - x^2 - 2 \le 2.$
5. $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} + 2\sqrt{x^2 + 7x} = 3 - 2x$	$x = 0.$ При $x \ge 0$ левая часть уравнения не меньше 3, а правая не больше 3.
6. $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = 2$	$x \in \varnothing.$ При $x \ge 0$ левая часть уравнения не меньше 3, а правая часть равна2.
7. $\cos x = x^2 - 4x + 5$	$x = 2.$ Левая часть уравнения не больше 1, а правая не меньше 1.
8. $3^{\lvert x\rvert} = \cos\frac{x}{3}$	$x = 0.$ Левая часть уравнения не меньше 1, а $-1 \le \cos\frac{x}{3} \le 1.$
9. $2\cos\frac{x}{3} = 5^x + 5^{-x}$	$x = 0.$
10. $3^{\lvert\sin\sqrt{x}\rvert} = \lvert\cos x\rvert$	$x = 0.$
11. $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x$	$x = \frac{\ }{2}\ + 2\ k,\ k\in Z\ .$ $\sin^5 x + \cos^5 x \le 1,\ 2 - \sin^4 x \ge 1$ из чего следует, что данное уравнение

	равносильно системе $\begin{cases} \sin^5 x+\cos^5 x=1 \\ 2-\sin^4 x=1 \end{cases}$.
12. $\cos^{10}x+\sin^{50}x=1$	$x=\frac{}{2}n,\ n\in Z$. Воспользоваться свойством чётных степеней $\sin x$ и $\cos x$ $\cos^{10}x\le\cos^2 x,\ \sin^{50}x\le\sin^2 x$ и теоремой о сложении неравенств одинакового смысла и перейти к совокупности систем простейших уравнений.
13. $\sin^4 2x+\cos^8\frac{2}{3}x+7\sin x=11$	нет решения. Оценить каждое слагаемое левой части уравнения и сложить неравенства одинакового смысла.
14. $\cos\frac{x}{6}=-x^2+12x-37$	$x=6$. Применить метод оценки.
15. $8\sin\frac{}{10}x=x^2-10x+33$	$x=5$.
16. $2\log_2\left(4x-x^2-2\right)=2$	Применить метод оценки. $x=2$.
17. $14^{\lvert 1-x\rvert}=\sin^2\frac{x}{2}$	$x=1$. Применить метод оценки.
18. $\sqrt{3y^2+6y+7}+\sqrt{5y^2+10y+14}=4-2y-y^2$	$x=-1$. При оценке левой и правой частей воспользоваться выделением полного квадрата.
19. $3+\left(x-\right)^2=1-2\cos x$	$x=$.
20. $\sqrt[4]{\log_5^4\left(x^2-3x+3\right)+1}=\cos^4\left(\left(x-2\right)\cdot\sin\left(2x+1\right)\right)$	$x=2$. Применить метод оценки.

4.Уравнения,при решении которых используется монотонность функций

Прежде, чем рассматривать виды уравнений, решаемых указанным способом, рассмотрим понятие монотонности функции и специальную теорему, лежащую в основе способа.

Определение1. *Функциюy=$f(x)$называется возрастающей(неубывающей)намножестве X, если для любых $x_1\in X$ и $x_2\in X$ из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)\le f(x_2)$).*

Определение 2. *Функциюy=$f(x)$называется убывающей(невозрастающей)на* *множестве X, если для любых* $x_1 \in X$ *и* $x_2 \in X$ *из неравенства* $x_1 < x_2$ *следует неравенство* $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Графический смысл введенных понятий

При движении вдоль оси абсцисс

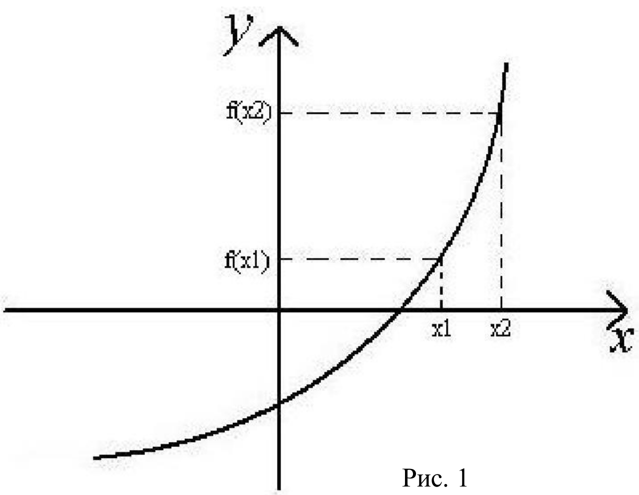


Рис. 1

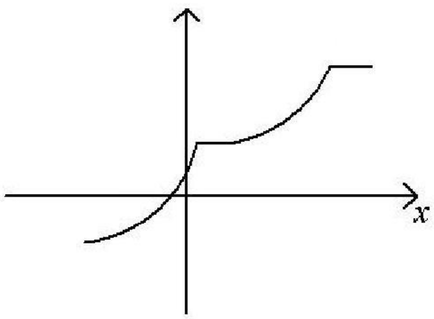


Рис. 2

слева направо ордината графика возрастающей функции увеличивается (рис. 1), а ордината убывающей функции уменьшается (рис. 2).

Если функция невозрастающая (или неубывающая), то её график может иметь участки постоянства (рис. 3).

Определение3. *Возрастающие и убывающие функции называются монотоннымифункциями.*

Рис. 3

Используя геометрический смысл чётности и нечётности функций, можно установить связь возрастания (убывания) с чётностью и нечётностью функции.

1^0. Если функция $y=f(x)$ на множестве X чётна и возрастает при $x>0$, то она убывает при $x<0$ (рис. 4).

2^0. Если функция $y=f(x)$ на множестве X чётна и убывает при $x>0$, то она возрастает при $x<0$ (рис. 5).

3^0. Если функция $y=f(x)$ на множестве X нечётна и возрастает при $x>0$, то она возрастает при $x<0$; кроме того, она возрастает на всём множестве X (рис. 6).

4^0. Если функция $y=f(x)$ на множестве X нечётна и убывает при $x>0$, то она убывает и при $x<0$; кроме того, она убывает на всём множестве X (рис. 7).

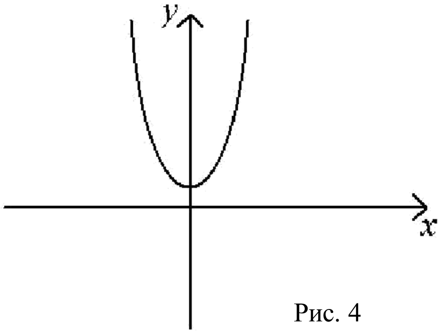
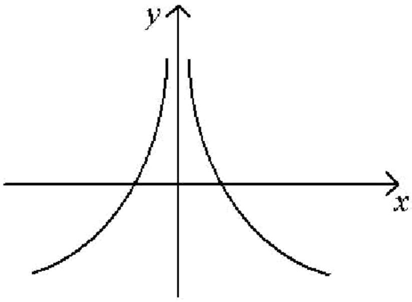


Рис. 4

Рис. 5



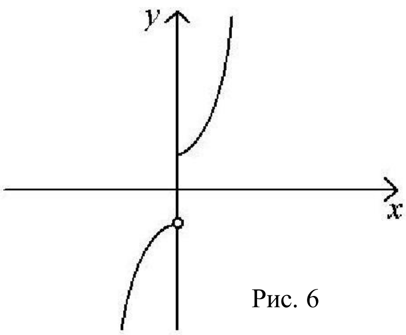


Рис. 6

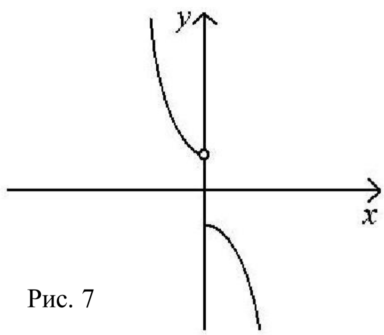


Рис. 7

Из приведённых фактов следует **алгоритм исследования функции намонотонность** элементарными средствами.

1. Установить ООФ и исследовать на чётность.
2. Если функция $f(x)$:

является чётной	является нечётной

является ни чётной, ни нечётной

Взять $x_1>0, x_2>0$, $x_1<x_2$ и установить знак разности $(x_1)-f(x_2)$

Взять $x_1 \in ООФ, x_2 \in ООФ, x_1<x_2$ и установить знак разности $f(x_1)-f(x_2)$

Если $f(x_1)-f(x_2)<0,$ сделать вывод, что

Если $f(x_1)-f(x_2)>0,$ сделать вывод, что

$f(x_1)-f(x_2)<0,$ то сделать вывод,

Если $f(x_1)-f(x_2)>0,$ то сделать вывод, что

$y=f(x)$ возрастает при $x>0$, а значит, возрастает при $x\in ООФ$.

$y=f(x)$ убывает34 при $x>0$, а значит и при $x<0$ убывает.

что $y=f(x)$ возрастает при $x\in ООФ$.

$y=f(x)$ убывает при $x\in ООФ$.

Можно исследование на монотонность проводить средствами математического анализа, используя достаточные признаки монотонности.

5^0. <u>Достаточный признак возрастания функции</u>

Если $f'(x)>0$ *в каждой точке интервала* ***J****, то функция* $y=f(x)$ *возрастает на* ***J***.

6^0. <u>Достаточный признак убывания функции</u>

Если $f'(x)<0$ *в каждой точке интервала* ***J****, то функция* $y=f(x)$ *убывает на* ***J***.

Алгоритм исследования функции на монотонность средствами математическогоанализа:

1. Установить ООФ.
2. Найти $f'(x)$.
3. Решить неравенства $f'(x)<0$ и $f'(x)>0$.
4. Проверив непрерывность функции на концах промежутков возрастания и убывания, записать ответ.

Рассмотрим образцы примеров исследования функции на монотонность.

П **р и м е р 4 . 1** .Исследовать на монотонность функцию$y=x^3$.

<u>Решение.</u>

1 <u>способ.</u>

1) ООФ: $x\in R$; функция нечётная.

2) Пусть $x_1>0, x_2>0$ и $x_1<x_2$, тогда

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0\Rightarrow\ y=x^3$$

возрастает при $x\in(0;\infty)$. Т.к. $y=x^3$ - функция нечётная, то она возрастает и при $x<0$.

3) На основании свойств нечётной функции и непрерывности $y=x^3$в точке $x=0$,делаем вывод,что $y=x^3$возрастает при $x\in R$.

2 <u>способ.</u>

1) ООФ: $x\in R$.

2) $y'=3x^2$.

3) $3x^2>0$ при$x\in R$.

4) Следовательно, функция возрастает при $x\in R$.

П **р и м е р 4 . 2**Исследовать на монотонность$f(x)=2x+\frac{2}{x}$.

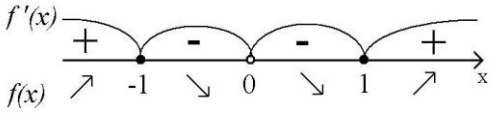
<u>Решение.</u>

1) ООФ: $x\neq 0$.

2) $f'(x)=2-\frac{2}{x^2}$.

3) $f'(x)=0$при $x=\pm 1$.Точки0, 1, -1разбивают ООФ,на4

промежутка. Определим знак $f'(x)$ на каждом из них.



4) Т.к. в точках ± 1 функция непрерывна, то ответ будет следующим: функция возрастает на промежутках $(-\infty;-1],[1;\infty)$; убывает на промежутках $[-1;\ 0),(0;1]$.

Рассмотрим специальную **теорему**, устанавливающую связь монотонности функций, входящих в уравнение, с количеством корней соответствующего уравнения:

1) *Если одна из функций возрастает, а другая убывает на промежутке X, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня на промежутке X.*

2) *Если одна из функций возрастает (убывает), а другая принимает постоянные значения на промежутке X, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня (один или не одного) на промежутке X.*

Из теоремы следует **алгоритм решения уравнений методом использования монотонности:**

1) *Исследовать на монотонность функции $f(x)$ и $g(x)$ в области определения уравнения.*

2) *Если выполняются условия теоремы для функций $f(x)$ и $g(x)$ и удаётся подобрать x_0, удовлетворяющее уравнению $f(x)$ и $g(x)$, то x_0 - единственный корень этого уравнения.*

Рассмотрим примеры решения уравнений методом использования монотонности функций.

П р и м е р 4 . 3 .Решить уравнение $\log_{\frac{1}{3}} x = x-4$.

<u>Решение</u>

Исследуем на монотонность функции $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$ и $g(x)=x-4$ в области определения уравнения $x>0$. Функция $f(x)$ убывает, функция $g(x)$ возрастает. Уравнению удовлетворяет $x=3$. Следовательно, согласно теореме, это единственный корень.

Ответ: $x=3$.

П р и м е р 4 . 4 .Решить уравнение $7^x+2^x=9$. <u>Решение</u>

Функция $f(x)=7^x+2^x$ возрастает при $x\in R$, функция $g(x)=9$ принимает постоянные значения при $x\in R$. Следовательно, $x=1$ - единственный корень уравнения.

Ответ: $x=1$.

П р и м е р 4 . 5 .Решить уравнение $2x^5+x^3+5x-80=\sqrt[3]{14-3x}$.

<u>Решение</u>

$f(x)=2x^5+x^3+5x-80$ на монотонность. Применим для

$\surd$

Исследуем функцию

исследования производную: $'$ 4 2 $+ 3x + 5$, т.к. $D = b^2 - 4ac = 9 - 200 < 0$, то

$f'(x) > 0$ при $x \in R$, т.е. $f(x)$-возрастающая функция. Исследуем на монотонность функцию $g(x) = \sqrt[3]{14 - 3x}$; $g' \quad \frac{1}{\sqrt[3]{(14-3x)^2}} < 0$ при $x \neq \frac{4}{3}$, т.е. $g(x)$ - убывающая функция. Так как функция $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию теоремы, то $x=2$- единственный корень.

Ответ: $x = 2$.

П р и м е р 4 . 6 .Решить уравнение $2x^3+9x^2+150x-161=0$.

Решение

Исследуем на монотонность $f(x)=2x^3+9x^2+150x-161$. $' \quad {}^2 + 18x + 150$. $D = 81 - 1200 < 0$ $'$ при $x \in R$, следовательно, функция $f(x)$ возрастает, а значит, каждое своё значение принимает единственный раз. При $x = 1$ $f(x) = 0$.

Ответ: $x = 1$.

П р и м е р 4 . 7 .Решить уравнение $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

Решение

$x = 2$ удовлетворяет уравнению, но утверждать, что это единственный корень, нельзя. Преобразуем уравнение к виду $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1$. В левой части полученного уравнения сумма убывающих функций (основания показательных функций положительны и меньше 1), следовательно, левая и правая части уравнения удовлетворяют условию теоремы, а значит $x = 2$ - единственный корень.

Ответ: $x = 2$.

Анализируя решённые примеры, можно сделать вывод о том, **к каким типамуравнений можно пытаться применить рассмотренный метод:**

1) *Если в уравнение входят функции разного вида* (примеры: 4.3; 4.5).

2) *Если в одной части уравнения возрастающая, а в другой соответственно убывающая или постоянная функция* (примеры: 4.3; 4.4; 4.5; 4.6).

3) *Если в обеих частях уравнения функции одинаковой монотонности, но уравнение можно свести к уравнениям предыдущего вывода* (пример: 4.7).

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ и указания
1. $x+3=2^{3-x}$	$x=1$.Исследовать на монотонность части данного уравнения.
2. $3 - tgx = 14^x + 2 \cdot 5^x$	$x=0$. Исследовать на монотонность левую и правую части уравнения и сделать вывод на основании теоремы о монотонности функций, входящих в уравнение.
3. $8x^3+3x^2+42x=52$	$x=1$. Исследовать на монотонность с помощью

	производной левую часть и сделать вывод на основании соответствующей теоремы о монотонности функций, входящих в уравнение.
4. $2^{\sqrt{x}} - 8^{\sqrt{x}} + 6^{\sqrt{x}} = 0$	$x = 1$. Привести уравнение к виду $\left(\frac{2}{8}\right)^{\sqrt{x}} + \left(\frac{6}{8}\right)^{\sqrt{x}} = 1$ и применить соответствующую теорему о монотонности функций, входящих в уравнение.
5. $\left(\frac{3}{5}\right)^{x} + \frac{7}{5} = 2^{x}$	$x = 1$. В левой части уравнения убывающая функция, а в правой – возрастающая.
6. $5^x + 2^{x+1} \cdot 3^x = 9^x + 4^x$	$x = 2$. Преобразовать уравнение к виду $5^x = \left(3^x - 2^x\right)^2$, а затем к виду $\left(\sqrt{5}\right)^{2x} = \left(3^x - 2^x\right)^2$, $\left\|\left(\sqrt{5}\right)^x\right\| = \left\|3^x - 2^x\right\|$, $\left(\sqrt{5}\right)^x = 3^x - 2^x$, $\left(\sqrt{5}\right)^x + 2^x = 3^x$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$.
7. $\log_2^2 x + \left(x - 1\right)\log_2 x = 6 - 2x$	$x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 2$. Рассмотреть уравнение как квадратное относительно $\log_2 x$, получим $\log_2 x = \frac{1 - x \pm \left(x - 5\right)}{2}$ или

	$\left[\begin{array}{l}\log_2 x=-2,\\ \log_2 x=3-x;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}\\ x=2;\end{array}\right.$, используя монотонность функций в области определения уравнения.
8. $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}$	$x=100$. Левая часть уравнения – возрастающая функция, правая – убывающая.
9. $x^{\lg^2 x}+10^{\lg x}=20$	$x=10$. Т.к. $x=10^{\lg x}$, - преобразовать исходное уравнение к виду $10^{\lg^3 x}=20-x$. В левой части уравнения возрастающая функция, а в правой – убывающая.
10. $\frac{x^2-4x+4}{x-5}-(x-8{,}1)^{\log_{x-8,1}\frac{97}{8}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}$	$x=9$. Преобразовать к виду $\frac{(x-2)^2}{x-5}-\frac{97}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}$ и применить метод использования монотонности функций в области определения уравнения.
11. $x+2=7^{6-x}$	$x=5$. В левой части уравнения возрастающая функция, а в правой – убывающая.
12. $12^x+7^x=19^x$	$x=1$. Преобразовать уравнение к виду $\left(\frac{12}{19}\right)^x+\left(\frac{7}{19}\right)^x=1.$ Уравнение удовлетворяет условию теоремы о монотонности функций, входящих в уравнение.
13. $5^{\sqrt{x}}-13^{\sqrt{x}}+12^{\sqrt{x}}=0$	$x=4$. Преобразовать уравнение к виду $\left(\frac{5}{13}\right)^{\sqrt{x}}+\left(\frac{12}{13}\right)^{\sqrt{x}}=1$. Уравнение удовлетворяет условию теоремы о монотонности функций, входящих в уравнение.
14. $2-tgx=2^x+5^x$	$x=0$. В левой части уравнения убывающая функция при $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, в правой – возрастающая.

5. ***Уравнения с двумя неизвестными***

Под уравнением с двумя неизвестными будем понимать уравнения вида $f(x;y)=0$.

Рассмотрим четыре способа решения уравнений с двумя неизвестными.

<u>1способ.</u> Использование условия равенства нулю суммы неотрицательных чисел. Сущность способа – замена исходного уравнения системой уравнений.

Теоретической основой способа является утверждение:

Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из чисел равно нулю.

Из вышесказанного следует, что представляемый метод применим к уравнениям вида

$$f^{2k}(x;y)+g^{2n}(x;y)+\ldots+\ldots^{2m}(x;y)=0 \qquad (*)$$

$$\sqrt[2k]{f(x;y)}+g^{2n}(x;y)=0 \qquad (**)$$

$$|f(x;y)|+g^{2m}(x;y)=0 \qquad (***)$$

и другие аналогичные виды.

Алгоритм метода:

1. Сравнить данное уравнение с перечисленными выше видами.
2. Если уравнение имеет вид (*), (**) или (***), то заменить данное уравнение равносильной системой

$$\begin{cases} f(x;y)=0 \\ g(x;y)=0 \\ \ldots \\ \ldots(x;y)=0 \end{cases}$$

3. Решить полученную систему в области определения уравнения (ООУ) и записать ответ.

П р и м е р 5 . 1 .Решить уравнение

$$\ln^6(x^2-2x-14)+\sqrt{x^4+2x^3-27}+|y-1|=0.$$

Решение.

1) Уравнение имеет вид

$$f^{2k}(x)+\sqrt{g(x)}+|\ldots(x;y)|=0$$

2) Заменим данное уравнение равносильной ему системой уравнений:

$$\begin{cases} \ln^6(x^2-2x-14)=0, \\ \sqrt{x^4+2x^3-27}=0, \\ |y-1|=0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ln(x^2-2x-14)=0, & (1) \\ x^4+2x^3-27=0, & (2) \\ y-1=0. & (3) \end{cases}$$

3) Решим первое и третье уравнения полученной системы:

$$\ln(x^2-2x-14)=0 \qquad\qquad y-1=0$$

$$x^2-2x-14=0 \qquad\qquad y=1$$

$$x_1=5 \qquad x_2=-3$$

Проверим, является ли $x_1=5$; $x_2=-3$ корнями уравнения(2):

$$\begin{cases} x=5, \\ 5^4+2\cdot125-27\neq0. \end{cases}$$ Получили, что $x_1=5$ -не корень уравнения(2).

$$\begin{cases} x=-3, \\ 81-54-27=0. \end{cases}$$ Значит, $x_1=-3$ - корень уравнения (2), а, следовательно, решением данного уравнения является пара $(-3;1)$.

Ответ: $(-3;1)$.

П р и м е р 5 . 2 .Решить уравнение $x^2y^2+x^2+y^2-14xy+2x-2y+37=0.$

1) Попробуем свести данное уравнение к виду (*):

$$\left(x^2 y^2 - 12xy + 36\right) + \left(x^2 - y + 1\right)^2 = 0 \text{ или } \left(xy - 6\right)^2 + \left(x - y + 1\right)^2 = 0$$

2) Полученное уравнение равносильно системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} (xy-6)^2=0, \\ (x-y+1)^2=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy-6=0, \\ x-y+1=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+1, \\ x^2+x-6=0; \end{cases}$$

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=-3 \quad \text{или} \quad x=2.$$

А)

$$\begin{cases} x=2, \\ y=2+1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} x=-3, \\ y=-3+1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=-2. \end{cases}$$

Ответ: $(2;\ 3); (-3; -2)$.

2 способ. Метод оценки.

Сущность метода и его теоретические основы разъяснены в пункте 2 «Уравнения, при решении которых используется ограниченность функций».

Рассмотрим примеры использования метода.

П р и м е р 5 . 3 .Решить уравнение $\dfrac{x^4+1}{x^2}=\sqrt{4-|y|}$.

<u>Решение.</u>

$$\frac{x^4+1}{x^2}=\sqrt{4-|y|} \quad\Rightarrow\quad x^2+\frac{1}{x^2}=\sqrt{4-|y|} \qquad \text{ООУ: } x\neq 0, -4\le y\le 4$$

Пусть $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ и $g(x)=\sqrt{4-|y|}$. Оценим каждую функцию.

а) $x^2+\dfrac{1}{x^2}\ge 2$ (по теореме $t+\dfrac{1}{t}\ge 2$ при $t>0$),т.е. $f(x)\ge 2$.

б) $0\le 4-|y|\le 4$, следовательно, $0\le\sqrt{4-|y|}\le 2$, т.е. $g(x)\le 2$.

Условия соответствующей теоремы в ООУ выполняются, значит исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x^4+1}{x^2}=2,\\ \sqrt{4-|y|}=2.\end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $x=\pm1, y=0$.

Ответ: $(1;\,0),(-1;\,0)$.

П р и м е р 5 . 4 .Решить уравнение $(x^2-4|x|+5)(y^2+6y+12)=3$.

<u>Решение.</u>

Пусть

а) $f(x)=x^2-4|x|+5$

$|x_0|=\dfrac{4}{2}=2$

$f(x_0)=f(-2)=4-8+5=1$, тогда $x^2-4|x|+5\ge 1$.

b) $g(y)=y^2+6y+12$

$y_0=-\dfrac{6}{2}=-3$

$g(y_0)=t(-3)=9-18+21=3$, тогда $g(y)\ge 3$.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что данное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases}x^2-4|x|+5=1,\\ y^2+6y+12=3;\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x=\pm2,\\ y=-3.\end{cases}$$

Ответ: $(2;-3),(-2;-3)$.

<u>3способ.</u> Решение уравнения с двумя неизвестными второй степени, как квадратного относительно одной из неизвестных.

Теоретической основой способа является теория квадратных уравнений.

Рассмотрим примеры решения уравнений этим способом.

П р и м е р 5 . 5 .Решить уравнение $20x^2+y^2-4xy+24x+9=0$.

Решение.

Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x .

$$20x^2-2x\left(2y-12\right)+y^2+9=0$$

$$x_{1,2}=\frac{2y-12\pm\sqrt{4y^2-48y+144-20y^2-180}}{20}=\frac{2y-12\pm\sqrt{-16y^2-48y-36}}{20}=$$

$$=\frac{2y-12\pm\sqrt{-4\left(4y^2-12y-9\right)}}{20}=\frac{2y-12\pm\sqrt{-4\left(2y+3\right)^2}}{20}.$$

Т.к. $D=-4\left(2y+3\right)^2\le 0$,то,следовательно,уравнение имеет решение при условии $\left(2y+3\right)^2=0$, т.е. $y=-\frac{3}{2}$, а тогда $x=\frac{2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-12}{20}=-\frac{15}{20}=-\frac{3}{4}$.

Ответ: $\left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{2}\right)$.

4 способ. Разложение на множители.

Сущность: представить данное уравнение в виде $f\left(x;y\right)\cdot g\left(x;y\right)=0$ и воспользоваться условием равенства произведения нулю.

П р и м е р 5 . 6 Решить уравнение $xy-2=2x-y$.

Решение.

$$xy-2=2x-y\Rightarrow xy-2x-2+y=0\Rightarrow x\left(y-2\right)+\left(y-2\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(y-2\right)\left(x+1\right)=0\Rightarrow\qquad y=2\ \ \textit{или}\ \ x=-1.$$

Ответ: $\left(-1;y\right), y\in R; \left(x;2\right), x\in R$.

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ и указания
1. $\frac{x^2+y^2+x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=2\sqrt{xy}$	$\left(1;1\right)$. Свести уравнение к виду $\left(x-\sqrt{y}\right)^2+\left(y-\sqrt{x}\right)^2=0$. $\left(0;0\right)$–постороннее решение.
2. $\sqrt{x^3+4x^2+25}+\ln^6\left(x^2+4x-4\right)+y^2=0$	$\left(-5;0\right)$.
3. $\sqrt[6]{x^3+3x^2+16}+arctg^2\left(x^2+x-12\right)+\ln^2 y=0$	$\left(-4;1\right)$.
4. $\sqrt[8]{y^4+5y^3+64}+\arcsin^2\left(y^2+4y\right)+\sqrt[4]{x^2-1}=0$	$\left(1;-4\right), \left(-1;-4\right)$.

5. $tg^2 2x+2\sqrt{3}\cdot tg2x+3=-ctg^2\left(4y-\frac{\pi}{3}\right)$	$\begin{cases} x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, & n\in Z, \\ y=\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{4}, & k\in Z. \end{cases}$ Свести уравнение к виду $(tg2x+\sqrt{3})^2+ctg^2\left(4y-\frac{\pi}{3}\right)=0.$
6. $\sin^2 x+\log_2^2\left(y^2-2y+1\right)=0$	$(\pi k;\ 0),(\pi k;\ 2),\ k\in Z$.
7. $1-2x-x^2=tg^2(x+y)+ctg^2(x+y)$	$\begin{cases} x=-1, \\ y=1+\frac{\pi}{4}+\pi k;\ k\in Z \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-1, \\ y=1-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ k\in Z. \end{cases}$ Оценить левую и правую части уравнения.
8. $\left(x^2+2x+2\right)\left(y^2-4y+6\right)=2$	$(-1;\ 2)$. Преобразовать левую часть уравнения $\left(x^2+2x+2\right)\left(y^2-4y+6\right)=$ $=\left((x+1)^2+1\right)\left((y-2)^2+2\right)$ и оценить её.
9. $\log_2\left(2+2\sin(x+y)-\cos^2(x+y)\right)=4^x-2^{x+1}+3$	$\left(0;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in Z.$ Преобразовать левую и правую части уравнения: $2\log_2\left(1+\sin(x+y)\right)=\left(2^x-1\right)^2+2$ и оценить их.
10. $9x^2+14y^2+13=12(x+y)$	$\left(\frac{2}{3};\ \frac{3}{2}\right).$ Рассмотреть уравнение как квадратное относительно x , которое будет иметь решение тогда и только тогда, когда $D=(2y-3)^2=0.$
11. $x^2+2{,}5y^2+3xy-y+1=0$	$(-3;\ 2)$. 1 способ: Рассмотреть уравнение как квадратное относительно x . 2 способ: Преобразовать уравнение к виду $(2x+3y)^2+(y-2)^2=0$.
12. $\left(x^2+4\right)\left(y^2+1\right)=8xy$	Рассмотреть как квадратное относительно y :

	$(x^2+4)y^2-8xy+4+x^2=0$ Ответ: $(2;1),(-2;-1)$.
13. $y\sqrt{x}-1=y-\sqrt{x}$	$(x;-1)$, $x>0$, $x\in R$; $(1;y)$, $y\in R$. Преобразовать к виду $(y+1)(\sqrt{x}-1)=0$.
14. $4x^2-25y^2=0$	$\left(x;\frac{2}{5}x\right);\left(x;-\frac{2}{5}x\right);x\in R$.
15. $x^2-3xy+2y^2=0$	$(x;x);\left(x;\frac{x}{2}\right);x\in R$.
16. $3x^2+10xy+3y^2=0$	$(x;-3x);\left(x;-\frac{1}{3}x\right);x\in R$.
17. $(y-2)^2+(x+1)^2=0$	$(-1;2)$.
18. $(2y+x-1)^2+(3x-y+1)^2=0$	$\left(-\frac{1}{7};\frac{4}{7}\right)$.
19. $\lvert 3y+2x-2\rvert+\lvert x-y+3\rvert=0$	$\left(-\frac{7}{5};\frac{8}{5}\right)$.
20. $y^2+4y=x^2-4x$	$(x;-x),(x;x-4);x\in R$.

6. Показательно-степенные уравнения

Показательно-степенными уравнениями будем называть уравнения вида $(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{(x)}$: неизвестное входит и в показатель степени и в основание степени.

Решение таких уравнений сводится к рассмотрению пяти случаев, если некоторые из них не исключаются видом функции $f(x)$.

Рассмотрим эти пять случаев:

1) $f(x)>0$, $f(x)\neq 1$. Данное уравнение при этих условиях– показательное и оно равносильно смешанной системе: $\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ g(x)=\ (x). \end{cases}$

2) $f(x)=1$. Необходимо решить это уравнение относительно x и подставить в исходное найденные значения x, проверив истинность получаемого числового равенства.

3) $f(x)=-1$. В этом случае уравнение примет вид $(-1)^{g(x)}=(-1)^{(x)}$. Полученному уравнению могут удовлетворять только такие значения x, при которых $g(x)$ и (x) - целые числа, т.к. отрицательное число можно возвести только в целую степень, причём из целых чисел уравнению могут удовлетворять целые числа одинаковой чётности.

4) $f(x)=0$. Исходное уравнение принимает вид $0^{g(x)}=0^{(x)}$. Этому уравнению могут удовлетворять только такие значения x, при которых $g(x)>0$ и $(x)>0$.

5) $\begin{cases} f(x)<0, \\ f(x)\neq -1. \end{cases}$ Решить полученную систему неравенств и из полученных значений x отобрать те, которые удовлетворяют исходному уравнению.

Рассмотрим примеры решения показательно-степенных уравнений.

Пример 6.1 .Решить уравнение $(2x-1)^x=(2x-1)^{x^2-2}$.

Решение

Решим данное уравнение по сформулированному алгоритму:

1) $\begin{cases} 2x-1>0, \\ 2x-1\neq 1, \\ x=x^2-2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2}, \\ x\neq 1, \\ x^2-x-2=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2}, \\ x\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=2. \end{array}\right. \end{cases}$

Решением данной системы является $x=2$.

2) $\begin{cases} 2x-1=1, \\ 1^x=1^{x^2-2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ 1=1; \end{cases}$

$x=1$ является решением данной системы,а,следовательно,и корнем данной уравнения.

3) $\begin{cases} 2x-1=-1, \\ (-1)^x=(-1)^{x^2-2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ 1=1. \end{cases}$ Решение данной системы $x=0$, значит, это очередной корень данного уравнения.

4) $\begin{cases} 2x-1=0, \\ 0^x=0^{x^2-2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ 0^{\frac{1}{2}}=0^{-\frac{7}{4}}. \end{cases}$ Для того, чтобы $x=\frac{1}{2}$ являлся корнем данного уравнения, необходимо чтобы в данной системе выполнялись неравенства $g(x)>0$ и $(x)>0$. Однако, $(x)=-\frac{7}{4}<0$,следовательно, $x=\frac{1}{2}$ корнем данного уравнения не является.

5) $\begin{cases} 2x-1<0, \\ 2x-1\neq -1, \\ x=x^2-2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\frac{1}{2}, \\ x\neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=2. \end{array}\right. \end{cases}$ Решением данной системы является $x=-1$.

Ответ: $\{-1, 0, 1, 2\}$.

$\sin x$ $\cos x$

П р и м е р 6 . 2 .Решить уравнение $(tgx) \qquad = (ctgx)$.

Решение

Преобразуем данное уравнение к виду $(tgx)^{\sin x} = (tgx)^{-\cos x}$. Переберём четыре возможных случая:

1) $\begin{cases} tgx > 0, \\ tgx \neq 1, \\ \sin x = -\cos x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tgx > 0, \\ tgx \neq 1, \\ tgx = -1 \end{cases}$ – система несовместна.

2) $\begin{cases} tgx = 1, \\ 1^{\sin x} = 1^{-\cos x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{}{4} + \quad \in Z, \\ 1 = 1 \end{cases}$ Следовательно,

$x = \frac{}{4} + k,\ k \in Z$ - решение данного уравнения.

3) $\begin{cases} tgx = -1, \\ (-1)^{\sin x} = (-1)^{\cos x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{}{4} + n,\ n \in Z, \\ (-1)^{\sin x} = (-1)^{\cos x}. \end{cases}$ У этой системы

нет решений, т.к. при $x = -\frac{}{4} + n,\ n \in Z$, синус и косинус не принимают целые значения.

4) $\begin{cases} tgx < 0, \\ tgx \neq -1, \\ \sin x = -\cos x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tgx < 0, \\ tgx \neq -1, \\ tgx = -1. \end{cases}$ Система не имеет решения.

Просмотрев результаты решения, получаем $x = \frac{}{4} + k,\ k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{}{4} + k,\ k \in Z$.

П р и м е р 6 . 3 .Решить уравнение $\left|3x^2-2\right|^{\sqrt{x+1}}=\left|3x^2-2\right|^{1+\sqrt{x}}$.

Решение

В данном уравнении $f(x)$ является величиной абсолютной,что позволяет нам рассмотреть всего 3 случая, т.к. $\left|3x^2-2\right|\geq 0$.

$$1)\quad \begin{cases} \left|3x^2-2\right|>0, \\ \left|3x^2-2\right|\neq 1, \\ \sqrt{x+1}=1+\sqrt{x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \\ x_{1,2}\neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ x_{3,4}\neq \pm 1, \\ \sqrt{x+1}=1+\sqrt{x}. \end{cases}$$

Решив уравнение $\sqrt{x+1}=1+\sqrt{x}$, получим $x=0$, который удовлетворяет смешанной системе.

2) $$\begin{cases} \left|3x^2-2\right|=1, \\ 1^{\sqrt{x+1}}=1^{1+\sqrt{x}}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\pm 1, \\ x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \end{array}\right. \\ 1^{\sqrt{x+1}}=1^{1+\sqrt{x}}. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет четыре корня, причём только два из них $x_1=1$ и $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ удовлетворяют области определения уравнения рассматриваемой системы.

3) $$\begin{cases} \left|3x^2-2\right|=0, \\ 0^{\sqrt{1+x}}=0^{1+\sqrt{x}}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \\ 0^{\sqrt{1+x}}=0^{1+\sqrt{x}}. \end{cases}$$

$x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ - не удовлетворяет области определения уравнения системы. Следовательно, $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ - корень уравнения.

Ответ: $\left\{0; \frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}; 1\right\}$.

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ
1. $(3x-4)^{2x^2+2}=(3x-4)^{5x}$	$\left\{\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 2\right\}$. Рассмотреть все случаи в соответствии с алгоритмом.
2. $\left\|x-1\right\|^{\lg^2 x-\lg x^2}=\left\|x-1\right\|^3$	$\left\{\frac{1}{10}; 2; 1000\right\}$.
	Т.к. $f(x)=\left\|x-1\right\|$, то рассмотреть 3 возможные случая в соответствии с рассмотренным алгоритмом.
3. $x^{\log_2 x^3-\log_2^2 x+3}-\frac{1}{x}=0$	$\left\{\frac{1}{2}; 1; 16\right\}$. Т.к. область определения уравнения $x>0$, то решение этого уравнения будет содержать два перебора для x: 1) $x>0, x\neq 1$; 2) $x=1$.
4. $\sqrt[3]{\left\|x^2-3\right\|^{x+2}}=\sqrt[4]{\left\|x^2-3\right\|^{x-1}}$, $x\neq\pm\sqrt{3}$	$\left\{-11; \pm\sqrt{2}; \pm 2\right\}$.

6. $x^{\log_3^3 x-1+\log_{\frac{1}{3}} x}=x^{3-\log_3 x}$	$\left\{\frac{1}{9};1;9\right\}$.
7. $\left(x^2+x-57\right)^{3x^2+3}=\left(x^2+x-57\right)^{10x}$	$\left\{\frac{-1\pm\sqrt{233}}{2};7;\frac{-1\pm\sqrt{229}}{2};3\right\}$.
8. $(x-2)^{x^2-x}=(x-2)^{12}$	$\{-3;1;2;3;4\}$.

7. Некоторые другие нестандартные уравнения

Рассмотрим решение других нестандартных уравнений на конкретных примерах.

П р и м е р 7 . 1 Решить уравнение $\sqrt{33+\frac{8}{\log_x 4}}=3\log_4\left(4\sqrt[3]{x^2}\right)$.

Решение

Так как x – основание логарифма, то $x>0$, $x\neq1$. При таких x определена и правая часть уравнения.

Преобразуем обе части исходного уравнения: $\frac{8}{\log_x 4}=8\log_4 x$;

$3\log_4\left(4\sqrt[3]{x^2}\right)=3\log_4\left(4x^{\frac{2}{3}}\right)=3\left(1+\frac{2}{3}\log_4 x\right)=3+2\log_4 x$.

При $x>0$, $x\neq1$ получим уравнение, равносильное исходному.

$\sqrt{8\log_4 x+33}=2\log_4 x+3$.

Пусть $t=\log_4 x$. Тогда $\sqrt{8t+33}=2t+3$;

$$\begin{cases} 2t+3 \ge 0, \\ 8t+33=(2t+3)^2; \end{cases}$$

$$8t+33=4t^2+12t+9;$$

$$4t^2+4t-24=0$$

$$t^2+t-6=0;$$

$$t_1=2,$$

$$t_2=-3.$$

При $t=-3$ $2t+3$ отрицательна. Число 2 проверим подстановкой $\sqrt{8\cdot 2+33}=2\cdot 2+3$.

Значит, $\log_4 x=2$, $x=4^2$, $x=16$.

Ответ: 16.

Пример 7.2. Найти все значения p, при которых уравнение $4\sin x+9=p\left(ctg^2 x\right)$ имеет хотя бы один корень.

Решение

Преобразуем данное уравнение $4\sin x+9=p\left(ctg^2 x\right)$;

$4\sin x+9=p\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$; $4\sin x+9=\left(\dfrac{p}{\sin^2 x}\right)$.

Последнее уравнение равносильно системе: $\begin{cases} 4\sin^3 x+9\sin^2 x=p, \\ \sin x\ne 0. \end{cases}$

Уравнение $4\sin^3 x+9\sin^2 x=p$ имеет хотя бы один корень, если число p принадлежит множеству значений выражения $4\sin^3 x+9\sin^2 x$. Найдём множество значений функции $y=4\sin^3 x+9\sin^2 x$ или $y=(4\sin x+9)\sin^2 x$.

Так как $-1\le\sin x\le 1$, то $0\le\sin^2 x\le 1$ и $9-4\le 4\sin x+9\le 4+9$, то есть $5\le 4\sin x+9\le 13$.

Значит, $0\le(4\sin x+9)\sin^2 x\le 13$. Следовательно, $0\le y\le 13$.

При $\sin x=0$ функция y принимает значения 0, при $\sin x=1$ - значение 13. Поэтому 0 – её наименьшее, а 13 – её наибольшее значения. Так как синус - непрерывная функция, то и функция y непрерывная и, значит, принимает все значения от 0 до 13. Поэтому $E(y)=[0;13]$.

Так как по условию $\sin x\ne 0$, то значение p- любое число из промежутка $(0;13]$.

Примечание. Уравнение $4\sin^3 x+9\sin^2 x=p$ можно преобразовать к равносильной системе $\begin{cases} \sin x=t, \\ -1\le t\le 1, t\ne 0, \\ 4t^3+9t^2=p \end{cases}$ и решить систему графически.

Ответ: $(0;13]$.

П р и м е р 7 . 3 .Решить уравнение $x-|x|\sqrt{1-\frac{4}{9x+4}}+2=0$.

<u>Решение</u>

Преобразуем данное уравнение

$$x+2=|x|\sqrt{1-\frac{4}{9x+4}} \quad\Rightarrow\quad x+2=|x|\sqrt{\frac{9x}{9x+4}}.$$

Подкоренное выражение и правая часть должны быть неотрицательны. Значит уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+2\ge 0, \\ \dfrac{9x}{9x+4}\ge 0, \\ (x+2)^2=|x|^2\cdot\dfrac{9x}{9x+4}. \end{cases}$$

Решим уравнение этой системы.

Так как $|x|^2=x^2$, то

$$(x^2+4x+4)(9x+4)=9x^3;$$

$$9x^3+40x^2+52x+16=9x^3;$$

$$40x^2+52x+16=0;$$

$$10x^2+13x+4=0;$$

$$x_1=-0.8; \quad x_2=-0.5.$$

Для чисел $-0{,}8$ и $-0{,}5$ неравенство $x+2\ge 0$ верно. Для обоих чисел $-0{,}8$ и $-0{,}5$ числитель и знаменатель дроби $\frac{9x}{9x+4}$. отрицательны, то есть верно неравенство $\frac{9x}{9x+4}\ge 0$. Следовательно,числа $-0{,}8$ и $-0{,}5$ являются корнями системы и поэтому являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $-0{,}8$ **и** $-0{,}5$.

П р и м е р 7 . 4 . Решить уравнение $x^2+6x+\sqrt{\frac{36x(x+6)}{x^2-36}-1}=x$.

Решение

При $x=\pm6$ не определена левая часть уравнения.

Для остальных x преобразуем подкоренное выражение:

$$x^2+6x+\frac{36x(x+6)}{x^2-36}=x^2+6x+\frac{36x}{x-6}=\frac{(x^2+6x)(x-6)+36x}{x-6}=\frac{x^3}{x-6}.$$

Получаем уравнение $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-6}}=x+1$, равносильное исходному при $x\neq\pm6$.

Подкоренное выражение и левая часть уравнения должны быть неотрицательны. Значит, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+1\geq0, \\ \dfrac{x^3}{x-6}\geq0, \\ \dfrac{x^3}{x-6}=(x+1)^2. \end{cases}$$

Решим уравнение этой системы.

$$x^3=(x-6)(x^2+2x+1);$$
$$x^3=x^3-4x^2-11x-6;$$
$$4x^2+11x+6=0;$$
$$x_1=-2;\quad x_2=-0.75.$$

Для $x_1=-2$ неравенство $x+1\geq0$ неверно. Значит, это не корень системы и не корень исходного уравнения. Для $x_2=-0{,}75$ неравенство $x+1\geq0$ верно, а числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x^3}{x-6}$ отрицательны, то есть сама дробь $\dfrac{x^3}{x-6}$ положительна. Значит, $x_2=-0{,}75$ являются корнем системы и поэтому является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x_2=-0{,}75$.

П р и м е р 7 . 5 .Решить уравнение

$$\left(\log_5\left(-2x^2+5x+7\right)-\log_5(x+1)\right)\cdot\log_{57-24x}25=1.$$

Решение

По условию $-2x^2+5x+7>0$; $x+1>0$ и $57-24x>0$, $57-24x\neq1$.

Так как $-2x^2+5x+7=(x+1)(7-2x)$, то $7-2x>0$. При таких x равносильны уравнения:

$$\left(\log_5\left(-2x^2+5x+7\right)-\log_5(x+1)\right)\cdot\log_{57-24x}25=1;$$
$$\left(\log_5(x+1)(7-2x)-\log_5(x+1)\right)\cdot\log_{57-24x}25=1;$$
$$\left(\log_5(x+1)+\log_5(7-2x)-\log_5(x+1)\right)\cdot\log_{57-24x}5^2=1;$$
$$2\cdot\log_5(7-2x)\cdot\log_{57-24x}5=1;$$
$$2\cdot\log(7-2x)$$

$$\frac{}{5} = 1;$$

$$\log_5(7 - 2x)^2 = \log_5(57 - 24x).$$

Логарифмическая функция монотонна. Получаем уравнение
$(7-2x)^2 = 57-24x$.

Решим его:

$$49-28x+4x^2 = 57-24x;$$
$$4x^2-4x-8=0;$$
$$x^2-x-2=0;$$
$$x_1=-1;\ x_2=2.$$

Число -1 не входит в ОДЗ, так как $x+1=0$.

Число 2 проверим подстановкой:

$$(\log_5(-8+10+7)-\log_5 3)\cdot \log_{57-48} 25 = (\log_5 9-\log_5 3)\cdot \log_9 25 == \log_5 3\cdot \log_{3^2} 5^2 = \log_5 3\cdot \log_3 5 = 1.$$

Ответ: 2.

П р и м е р 7 . 6 . Найти все значения *p*, при которых уравнение

$$2\cos 2x+\frac{p}{\sin x} = -11$$ не имеет корней.

Решение

Преобразуем данное уравнение:

$$2\cos 2x+\frac{p}{\sin x} = -11;$$
$$2(1-2\sin^2 x)+\frac{p}{\sin x} = -11;$$
$$4\sin^2 x-13 = \frac{p}{\sin x}.$$

Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases}(4\sin^2 x-13)\sin x = p; \\ \sin x\neq 0.\end{cases}$ Найдём значения p, при которых эта система имеет решения.

Уравнение $(4\sin^2 x-13)\sin x = p$ имеет корни, только в том случае, когда число *p* принадлежит множеству значений выражения $(4\sin^2 x-13)\sin x$. Значит, следует найти множество значений функции $y=4\sin^3 x-13\sin x$.

Пусть $\sin x = t$. Тогда $y=4t^3-13t$, $-1\le t\le 1$. Так как $-1\le \sin x\le 1$, то $|t|\le 1$. Отсюда $0\le t^2\le 1$ и $12t^2-13\le -1<0$. Поэтому $y'<0$ и функция y убывает на отрезке $[-1;1]$. Следовательно, $y(-1)=9$ - наибольшее, а $y(1)=-9$ - наименьшее значение функции y. Так как синус – непрерывная функция, то функция y непрерывная. Поэтому она принимает все значения от наименьшего, до наибольшего, то есть $E(y)=[-9;9]$.

По условию $\sin x\neq 0$.

Значит, система $\begin{cases}(4\sin^2 x-13)\sin x=p;\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$ **имеет решения при** $p\in[-9;0)\cup(0;9]$**.Следовательно,эта система не имеет решения при** $p\in(-\infty;-9)\cup\{0\}\cup(9;+\infty)$**.**

Ответ: $(-\infty;-9)\cup\{0\}\cup(9;+\infty)$.

П **р и м е р 7 . 7** .Решить уравнение $\sqrt{49+9x|x+4|}-2x=7$

Решение

Оставим квадратный корень в левой части и возведем в квадрат:

$$\sqrt{49+9x|x+4|}-2x=7\ ;\ \sqrt{49+9x|x+4|}=2x+7\ ;\ 9x|x+4|=4x^2+28x\ .$$

Запишем члены уравнения в левой части и вынесем общий множитель:

$$4x^2+28x-9x|x+4|=0;$$

$$x(4x+28-9|x+4|)=0.$$

Подстановкой проверяем, что $x=0$ – корень уравнения. При остальных x получаем $9|x+4|=4x+28$.

a. При $x<-4$ получаем: $-9x-36=4x+28;\ 13x=-64;$ $x=-\frac{64}{13}<-4$.Но при таком x сумма $2x+7$ отрицательна,следовательно, равенство $\sqrt{49+9x|x+4|}=2x+7$ невозможно.

b. При $x\geq -4$ получаем: $9x+36=4x+28$;$x=-\frac{8}{5}>-4$.

Проверим. Подставив $-\frac{8}{5}$ в левую часть исходного уравнения, получим:

$$\sqrt{49+9\cdot\frac{8}{5}\left|-\frac{8}{5}+4\right|}-2\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)=\sqrt{\left(\frac{19}{5}\right)^2}+\frac{16}{5}=7$$.Следовательно,$-\frac{8}{5}$ - корень данного уравнения.

$\frac{8}{5}$

П **р и м е р 7 . 8** .Решите уравнение $2|2^x-x|=3\cdot 4^x+2^{x+2}-1{,}75$.

Решение

Приведём степени к одному основанию. Получим уравнение, равносильное данному:

$$2\cdot|2^x-x|=3\cdot(2^x)^2+4\cdot 2^x-1{,}75.$$

Пусть $2^x=y$, тогда уравнение принимает вид:

$3y^2+4y-1{,}75-2\cdot|y-1|=0$.Это уравнение,используя определение модуля,заменим равносильной ему совокупностью систем:

$$\begin{cases} y \geq 1, \\ 3y^2 + 4y - \frac{7}{4} - 2(y-1) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < y < 1, \\ 3y^2 + 4y - \frac{7}{4} + 2(y-1) = 0. \end{cases}$$

a. Уравнение первой системы приведём к виду:

$12y^2 + 8y + 1 = 0$.По формуле корней квадратного уравнения получаем: $y = -\frac{1}{2}$ или $y = -\frac{1}{6}$. Это посторонние решения системы,так как не выполняется условие $y \geq 1$. Следовательно, система решений не имеет.

b. Уравнение второй системы приведём к виду:

$4y^2 + 8y - 5 = 0$.По формуле корней квадратного уравнения получаем: $y = -\frac{5}{2}$ или $y = \frac{1}{2}$. Неравенству $0 < y < 1$, удовлетворяет только $y = \frac{1}{2}$, который является решением второй системы, и, следовательно, совокупности системы.

Итак, $2^x = \frac{1}{2}$, следовательно $x = -1$.

Ответ: -1.

П р и м е р 7 . 9 .При каких a уравнение $(2x-3a)\log_{a+2-x}\left(\dfrac{a^2-2a+x}{4x^2-11x+8}\right)=0$

а) не имеет решения;

б) имеет единственный корень;

в) имеет 2 корня;

г) имеет 3 корня.

<u>Решение</u>

1) Найдём ООУ:

$$\begin{cases} a+2-x>0, \\ 4x^2-11x+8\neq 0, \\ \dfrac{a^2-2a+x}{4x^2-11x+8}>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<a+2, \\ x\neq a+1, \\ x\in R, \\ x>2a-a^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<a+2, \\ x\neq a+1, \\ x>2a-a^2 \end{cases}.$$

2) Решим данное уравнение, воспользовавшись условием равенства произведения нулю:

$2x-3a=0$ или $\log_{a+2-x}\left(\dfrac{a^2-2a+x}{4x^2-11x+8}\right)$

$$x_1=\frac{3a}{2}$$

$$\frac{a^2-2a+x}{4x^2-11x+8}=1,$$

$$a^2-2a+x=4x^2-11x+8,$$

$$4x^2-12x+8-a^2+2a=0,$$

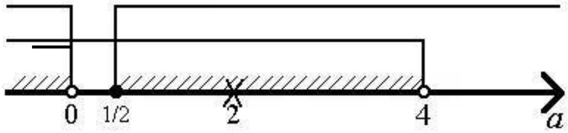
$$x_{2,3}=\frac{6\pm\sqrt{36-32+4a^2-8a}}{4}=$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{4a^2 - 8a + 4}}{4} = \frac{6 \pm (2 - 2a)}{4}$$

$$x_2 = \frac{4 - a}{2}; \; x_3 = \frac{2 + a}{2}.$$

3) Установим, при каких a найденные x_1, x_2, x_3 удовлетворяют ООУ:

а) $\begin{cases} x = \dfrac{3a}{2}, \\ \dfrac{3a}{2} < a + 2, \\ \dfrac{3a}{2} \neq a + 1, \\ \dfrac{3a}{2} > 2a + a^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \\ a \\ a \neq 2, \\ a > \dfrac{1}{2}, \\ a < 0; \end{cases}$



$x = \dfrac{3a}{2}$, если $a \in (-\infty; 0) \cup \left(\dfrac{1}{2}; 2\right) \cup (2; 4).$

б) $\begin{cases} x = \dfrac{4 - a}{2}, \\ \dfrac{4 - a}{2} < a + 2, \\ \dfrac{4 - a}{2} \neq a + 1, \\ \dfrac{4 - a}{2} > 2a - a^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4 - a}{2}, \\ a > 0, \\ a \neq \dfrac{2}{3}, \\ a \in R. \end{cases}$ $\quad x = \dfrac{4 - a}{2}$, если

$a \in \left(0; \dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2}{3}; \infty\right).$

в) $\begin{cases} x = \dfrac{2 + a}{2}, \\ \dfrac{2 + a}{2} < a + 2, \\ \dfrac{2 + a}{2} \neq a + 1, \\ \dfrac{2 + a}{2} > 2a - a^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2 + a}{2}, \\ a > -2, \\ a \neq 0, \\ a \in R. \end{cases}$ $\quad x = \dfrac{2 + a}{2}$, если

$a \in (-2; 0) \cup (0; \infty).$

4) Найдём те a, при которых выполняются требования задачи:

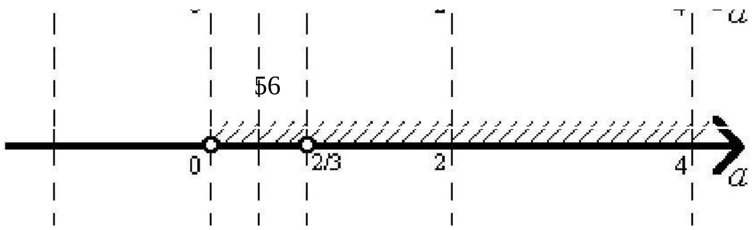
$x = \dfrac{3a}{}$

2

$x = \quad 4 - a$

———

2



$x=\frac{2+a}{2}$

1 корень, если $a\in(-\infty;-2]$.

2 корня, если $a\in(-2;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\left\{\frac{2}{3};2\right\}\cup(4;\infty)$.

3 корня, если $a\in\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};2\right)\cup(2;4)$.

Нет корней, если $a\in\{0\}$.

Ответ:

Если $a\in(-\infty;-2]$, то 1 корень.

Если $a\in(-2;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\left\{\frac{2}{3};2\right\}\cup(4;\infty)$, то 2 корня.

Если $a\in\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};2\right)\cup(2;4)$, то 3 корня.

Если $a=0$, то нет корней.

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ и указания
1. $tgx+ctgx+tg^2x+ctg^2x+tg^3x+ctg^3x=6$	$x=\frac{\ }{4}+\ k,\ k\in Z$. Ввести переменную $t=tgx+ctgx$, тогда $tg^2x+ctg^2x=t^2-2$, а для выражения tg^3x+ctg^3x через t воспользоваться формулой $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$
2. При каких а уравнение $15\cdot10^x-20-a-a\cdot10^{x+1}=0$ не имеет корней?	$a\in(-\infty;-20]\cup[1{,}5;\infty)$. Найти a, при которых исходное уравнение имеет решения. Для этого привести его к виду $10^x=\frac{20+a}{15-10a}$ при $a\neq\frac{3}{2}$ и потребовать чтобы $\frac{20+a}{15-10a}$ было положительным.
3. При каких значениях параметра a уравнение $(\cos x-\log_6 a)\cdot(\cos x-3+3b)=0$ имеет ровно два корня на отрезке $[0;2]$?	$\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right)\cup\{1\}\cup\left(\frac{4}{3};6\right)$. При решении совокупности простейших тригонометрических уравнений использовать ограниченность $\cos x$, а также

рассмотреть случай , когда

	$\log_6 a = 3 - 3b$.
4. При каком a уравнение $\log_3\left(9^x + 9a^3\right) = x$ имеет два корня?	$\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{36}}\right)$. Ввести новую переменную $t = 3^x$ и к полученному квадратному уравнению $t^2 - t + 9a^3 = 0$ применить условия $D > 0$, $t_1 \cdot t_2 > 0$.
5. Найти a, при которых уравнение $(a+1)\cdot 4^x + 2(a-1)\cdot 2^x + 3(a-1) = 0$ не имеет решения.	$(-\infty; -2] \cup [1; \infty)$. Ввести новую переменную $t = 2^x$ и рассмотреть уравнение $(a+1)t^2 + 2(a-1)t + 3(a-1) = 0$: а) как линейное; б) как квадратное, не имеющее действительных корней; в) как квадратное, имеющее единственный отрицательный корень или два отрицательных корня.
6. $32^{x+3} \cdot 3^{3x+1} \cdot 625^{x+2} = 600^{x+7}$	$x = 3$. Воспользоваться свойством степеней и преобразовать уравнение к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$
7. $6x + x^2 - x^3 - \sqrt{\cos x - 1} = 0$	$\{0; 2\}$. Найти ООУ и решить разложением на множители полученное алгебраическое уравнение 3 степени.
8. Найти значения параметра a, при котором уравнение $\left\lvert x^2 + 2x - 8 \right\rvert = a$ имеет ровно 3 различных корня.	$a = 9$. Построить графики функций $y = \left\lvert x^2 + 2x - 8 \right\rvert$ и $y = a$.
9. Найти все значения p, при которых уравнение $\sin x - 5 = p\left(1 + ctg^2 x\right)$ имеет хотя бы один корень	$[-6; 0)$. Решение уравнения аналогично предыдущему или по образцу 6.2.
10. Найти все значения p, при которых уравнение $2^{3x+1} + 8 = 3 \cdot 2^{x+1}\left(3 + 2^x\right) + p$ или не имеет корней, или имеет единственный корень.	$(-\infty; -46] \cup [8; \infty)$. Решение аналогично.
11. Найти все значения p, при которых уравнение $2^{x+1}\left(4^{x+1} + 6\right) + 2^x\left(2^{2x} - 9 \cdot 2^{x+1}\right) = p + 4\left(9 \cdot 2^{2x-3} - 1\right)$ имеет ровно 2 корня.	$\left(1\frac{1}{3}; 4\right] \cup \left\{5\frac{5}{6}\right\}$. Решение аналогично, учесть, что $2^x > 0$.
12. При каких значениях p, уравнение $\cos 2x + \frac{p}{\sin x} = -10$ не имеет решений.	$(-\infty; -9) \cup \{0\} \cup (9; \infty)$.

13. Решить уравнение:	$x = 1$.

$3+\log^4_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x+1\right)=3\left\|\cos\left((x-1)\cdot\cos x\right)\right\|$	Использовать метод оценки.
14. Решить уравнение: $\cos^2\left((x+2)\cdot\cos 2x\right)-1=\left\|\log_2\left(x^2+5x+7\right)\right\|$	$x=-2.$ Использовать метод оценки.
15. Решить уравнение: $_6\ \cos^6\left(x^2\sin x\right)\quad -1=\log^6\left(9x^2+3x+1\right)$	$x=0.$ Использовать метод оценки.
16. Найти все значения p, при которых уравнение $3^x\left(3^{2(x+1)}-7{,}5\cdot 3^{x+1}\right)=p-3\left(4\cdot 3^x+1\right)$ имеет ровно три корня.	$\left(3;\ 4\frac{5}{6}\right).$ Преобразовать уравнение к виду $9t^3-22{,}5t^2+12t+3=p$, где $t=3^x$, $t>0$. Ввести функции $y=9t^3-22{,}5t^2+12t+3$ и $y=p$, построить их графики и найти ответ.
17. Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $\ln x=\frac{a}{x}$?	1 корень, если $a=-\frac{1}{e}$ или $a\geq 0$; 2 корня, если $a\in\left(-\frac{1}{e};\ 0\right)$; нет корней, если $a<-\frac{1}{e}$. В ООУ $x>0$ данное уравнение равносильно уравнению $x\ln x=a_0$. Построить схематический график функции $y=x\ln x$, используя производную, и «считать» с графика ответ.
18. Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $e^x=ax$?	1 корень, если $a<0$ или $a=e$; 2 корня, если $a>e$; нет корней, если $a\in\left[0;e\right)$. Свести уравнение к виду $\frac{e^x}{x}=a$ ($x=0$ - не корень). Построить график функции $y=\frac{e^x}{x}$ и «считать» ответ с графика.
19. $\left\|1-\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)\right\|=1-\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)$	$\left(0;\ \frac{1}{2}\right)\cup\left[1;\ 2\right)\cup\left(3;\ 6\right].$ Т.к. уравнение имеет вид $\|t\|=t$,то его можно заменить равносильной системой неравенств :

	$\begin{cases} 1-\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)\geq 0, \\ 2x>0, \\ 2x\neq 1, \end{cases}$ которая равносильна совокупности следующих систем неравенств: а) $\begin{cases} 0<x<\dfrac{1}{2}, \\ x^2-7x+6\geq 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x>\dfrac{1}{2}, \\ x^2-5x+6>0, \\ x^2-7x+6\leq 0. \end{cases}$

Литература:

1. Колягин Ю.М., Ткаченко М.В. и др. Алгебра и начала математического анализа 10кл, 11 кл.. Просвещение 2017 год

2. Способы решения нестандартных уравнений и неравенств: Элективный курс по математике для учащихся 10-11классов с программно-дидактическим обеспечением / Сост. Е.Г. Володькин, Т.С. Кармакова, И.Д. Шелягина – Хабаровск: Изд-во ХК ИПП ПК, 2006.

3. Шарыгин И.В. "Факультативный курс по математике. Решение задач. 10 кл.". Москва. "Просвещение" 1996 год.

4. Шарыгин И.В. "Факультативный курс по математике. Решение задач. 11 кл.". Москва. "Просвещение" 1991 год.

5. "Единый государственный экзамен". Контрольно – измерительные материалы 2017-2020г.

6. ЕГЭ 2019. Математика. Учимся решать задачи с параметром. Подготовка к ЕГЭ: задание С5. Иванов С.О. и др. Под ред. Лысенко Ф.Ф., Кулабухова С.Ю. Ростов н/Д: Легион-М, 2018 .

7. ЕГЭ 2019. Математика. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней.

8. http://www.edu.ru - Федеральный портал Российское образование

9. http://www.school.edu.ru - Российский общеобразовательный портал

10. www.1september.ru - «Математика» - приложение к газете «1сентября»

11. http://school-collection.edu.ru – единая коллекция цифровых образовательных ресурсов

12. http://ege.yandex.ru/mathematics - он-лайн тестирование

13. http://ege-online-test.ru/1conn.php - он-лайн тестирование

14. http://www.school-tests.ru/online-ege-math.html - он-лайн тестирование

15. http://решуегэ.рф – сайт подготовки к ЕГЭ